則古昔齋算十三種

橢圜新術

則古昔齋算學六

海甯李善蘭學

第一術

以角求積

設有實引角若干度求橢圜面積爲平引

求平圜面積角

一率　小半徑

二率　大半徑

三率　實引正切

四率　平圜面積角正切

求較角

一率　半徑

二率　兩心差

三率　平圓面積角正弦

四率　較角正弦

以較角加減面積角最高後加最卑後減得借積度

求積差

一率　半徑

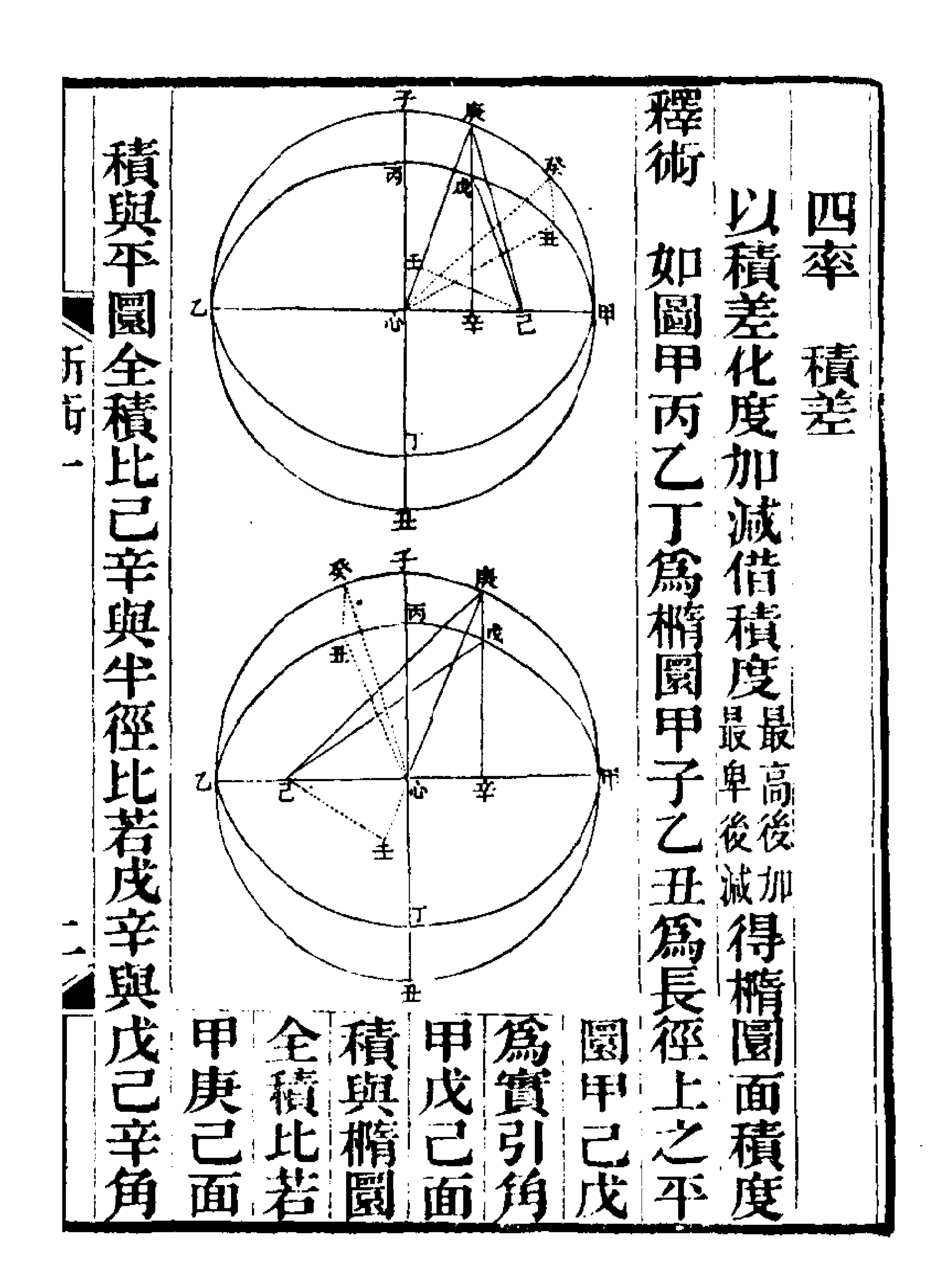
二率　兩心差

三率　借積度正弦

四率 積差

以積差化度加減借積度（最高後加 最卑後減）得橢圓面積度

釋術 如圖甲丙乙丁爲橢圓甲子乙丑爲長徑上之平圜甲己戊爲實引角甲戊己面積與橢圓全積比若甲庚己面積與平圜全積比己辛與半徑比若戊辛與戊己辛角



實引角上圖外角下圖本角正切比亦若庚辛借積度正弦與庚己辛角平圓面積角上圖外角下圖本角正切比丙心小半徑與子心即大半徑比若戊辛與庚辛比則亦若戊己辛角正切與庚己辛角正切比故以丙心小半徑為一率子心大半徑為二率戊己辛角正切實引正切為三率得四率庚己辛角正切平圓面角正切也

庚己心三角形有庚心邊半徑有所對己角平圓面積角有己心邊兩心差求所對庚角較角法以庚心邊為一率己心邊為二率己角正弦為三率得四率庚角正弦上圖以庚角減庚己甲角下圖以庚角加庚己甲角各得庚心甲角為借積度庚辛為借積度正弦　庚辛心己壬心

爲同式句股形故庚心大弦（半徑）爲一率己心小弦（兩心差）爲二率庚辛大股（借積度正弦）爲三率得四率己壬小股己壬乘庚心半徑得數半之與庚心己三角面積等故己壬爲積差取庚癸弧線令與己壬等以加減借積度甲庚（上圖減下圖加）得甲癸爲平引度其面積心甲癸以短徑乘之長徑除之得心甲丑面積與己甲戊面積等故甲癸爲面積度

第二術

以積求角

設有平引面積若干度求實引角度

求借積度

命借積度爲天平引度爲子半徑爲甲兩心差爲乙以級數術入之

$$天＝子丅\left(\frac{甲}{乙}丅\frac{甲^{二}}{乙^{二}}丄\frac{甲^{三}}{乙^{三}}丅\frac{甲^{四}}{乙^{四}}丄\cdots\right)子$$
$$丄\left(\frac{甲^{二}}{乙}丅\frac{甲^{四}}{四乙^{二}}丄\frac{甲^{五}}{一〇乙^{三}}丅\frac{甲^{六}}{二〇乙^{四}}丄\cdots\right)\frac{二×三}{子^{三}}$$
$$丄\left(\frac{甲^{五}}{乙}丅\frac{甲^{六}}{一六乙^{二}}丄\frac{甲^{七}}{九一乙^{三}}丅\frac{甲^{八}}{三三六乙^{四}}丄\cdots\right)\frac{二×三×四×五}{子^{五}}$$
$$丄\left(\frac{甲^{七}}{乙}丅\frac{甲^{八}}{六四乙^{二}}丄\frac{甲^{九}}{八一〇乙^{三}}丅\frac{甲^{一〇}}{五四四〇乙^{四}}丄\cdots\right)\frac{二×三×四×五×六×七}{子^{七}}$$
$$丅\cdots\cdots$$

最高後用此級數

$$天＝子丄\left(\frac{甲}{乙}丄\frac{甲^{二}}{乙^{二}}丄\frac{甲^{三}}{乙^{三}}丄\frac{甲^{四}}{乙^{四}}丄\cdots\right)子$$
$$丅\left(\frac{甲}{乙}丄\frac{甲^{四}}{四乙^{二}}丄\frac{甲^{五}}{一〇乙^{三}}丄\frac{甲^{六}}{二〇乙^{四}}丄\cdots\right)\frac{二×三}{子^{三}}$$
$$丄\left(\frac{甲^{五}}{乙}丄\frac{甲^{六}}{一六乙^{二}}丄\frac{甲^{七}}{九一乙^{三}}丄\frac{甲^{八}}{三三六乙^{四}}丄\cdots\right)\frac{二×三×四×五}{子^{五}}$$
$$丅\left(\frac{甲^{七}}{乙}丄\frac{甲^{八}}{六四乙^{二}}丄\frac{甲^{九}}{八一〇乙^{三}}丄\frac{甲^{一〇}}{五四四〇乙^{四}}丄\cdots\right)\frac{二×三×四×五×六×七}{子^{七}}$$
$$丄\cdots\cdots$$

最卑後用此級數

平引度化弧背眞數依右式求得正負各級并諸正級減諸負級化爲度即借積度

求橢圓正弦

一率　大半徑

二率　小半徑

三率　借積度正弦

四率　橢圓正弦

求橢圓餘弦

兩心差加借積度矢最卑後借積不滿象限用小矢過象限用大矢最高後借積不滿象限用大矢過象限用小矢與半徑相減得橢圓餘弦

求實引

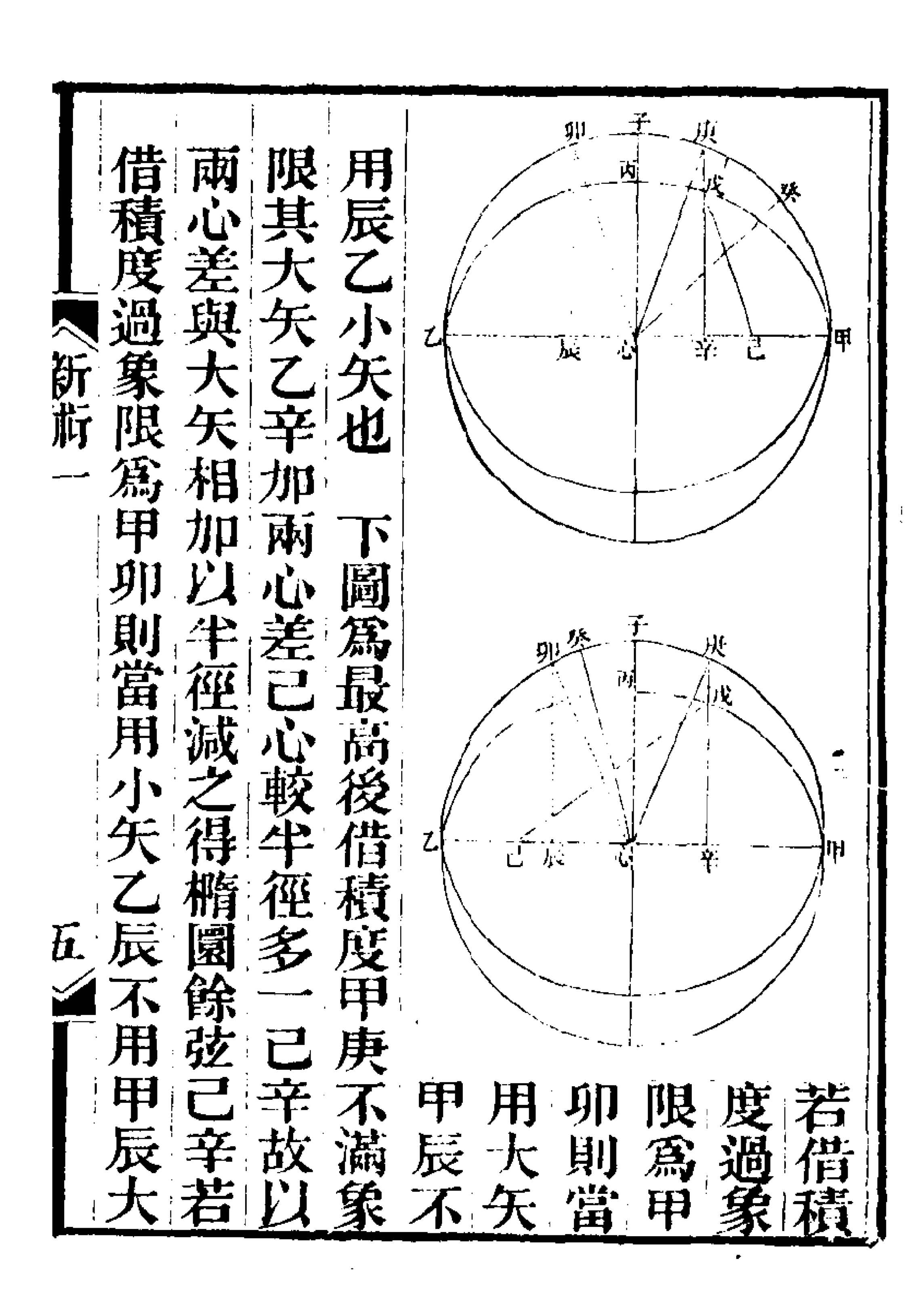
一率　橢圓餘弦

二率　橢圜正弦

三率　半徑

四率　實引正切

釋術　如圖甲癸爲平引面積度依級數求得甲庚借積度其正弦庚辛戊辛爲橢圜正弦己辛爲橢圜餘弦子心與丙心比若庚辛與戊辛比故以子心大半徑爲一率丙心小半徑爲二率庚辛借積度正弦爲三率得四率橢圜正弦戊辛也　上圖爲最卑後借積度甲庚不滿象限其小矢甲辛加兩心差己心較半徑甲心多一己辛故以兩心差與小矢相加以半徑減之得橢圜餘弦己辛



若借積度過象限爲甲卯則當用大矢甲辰不用辰乙小矢也　下圖爲最高後借積度甲庚不滿象限其大矢乙辛加兩心差己心較半徑多一己辛故以兩心差與大矢相加以半徑減之得橢圜餘弦己辛若借積度過象限爲甲卯則當用小矢乙辰不用甲辰大

矢也　若兩心差加借積度矢恰得半徑則實引角爲九十度若小于半徑則反減之理亦同　戊己辛爲實引角若己辛爲半徑則戊辛爲實引正切故以己辛橢圜餘弦爲一率戊辛橢圜正弦爲二率半徑爲三率得四率實引正切也

釋數　求借積度之級數式其係數中遞增之數頗不易明今爲釋之

甲

一

四

一九

一六 四

一五 一九

三六 一六 四

乙	一	一六	八一 一〇	二五六 八〇	六二五 三〇〇 三五〇	一二九六 八二二 二四
丙	一	六四	七二九 九	四〇九六 三二四	一五六二五 八三七九 九六	四六六五六 三四〇四八 九四〇八
丁	一	二五六	六五六一 八〇	六五五三六 二七八〇	三九〇六二五 三六〇八 四九七	一六七九六一六 九一四 六四四八

法以諸平方數逐層列之爲甲之第一行降二層復列之爲甲之第二行又降二層復列之爲甲之第三行四行以下倣此次以甲之第一行諸層各自乘爲乙之第一行各再乘爲丙之第一行各三乘爲丁之第一行戊

己諸第一行仿此次以甲之一二行各層併之以二行各層乘之爲乙之第二行以乙之一二行併之以甲之二行乘之爲丙之第二行以丙之一二行併之以甲之二行乘之爲丁之第二行戊己諸第二行仿此次併甲之一二三行以甲之三行乘之爲乙之第三行併乙之一二三行以甲之三行乘之爲丙之第三行併丙之一二三行以甲之三行乘之爲丁之第三行戊己諸第三行仿此四行以下皆如此法乃以甲之各行逐層併之爲子係數中之遞增數以乙之各行逐層併之爲子係數中之遞增數以丙之各行逐層併之爲子係數中之

遞增數餘可類推

一法可先得一二行併數三行以下仍用前法求之似較便捷列如左

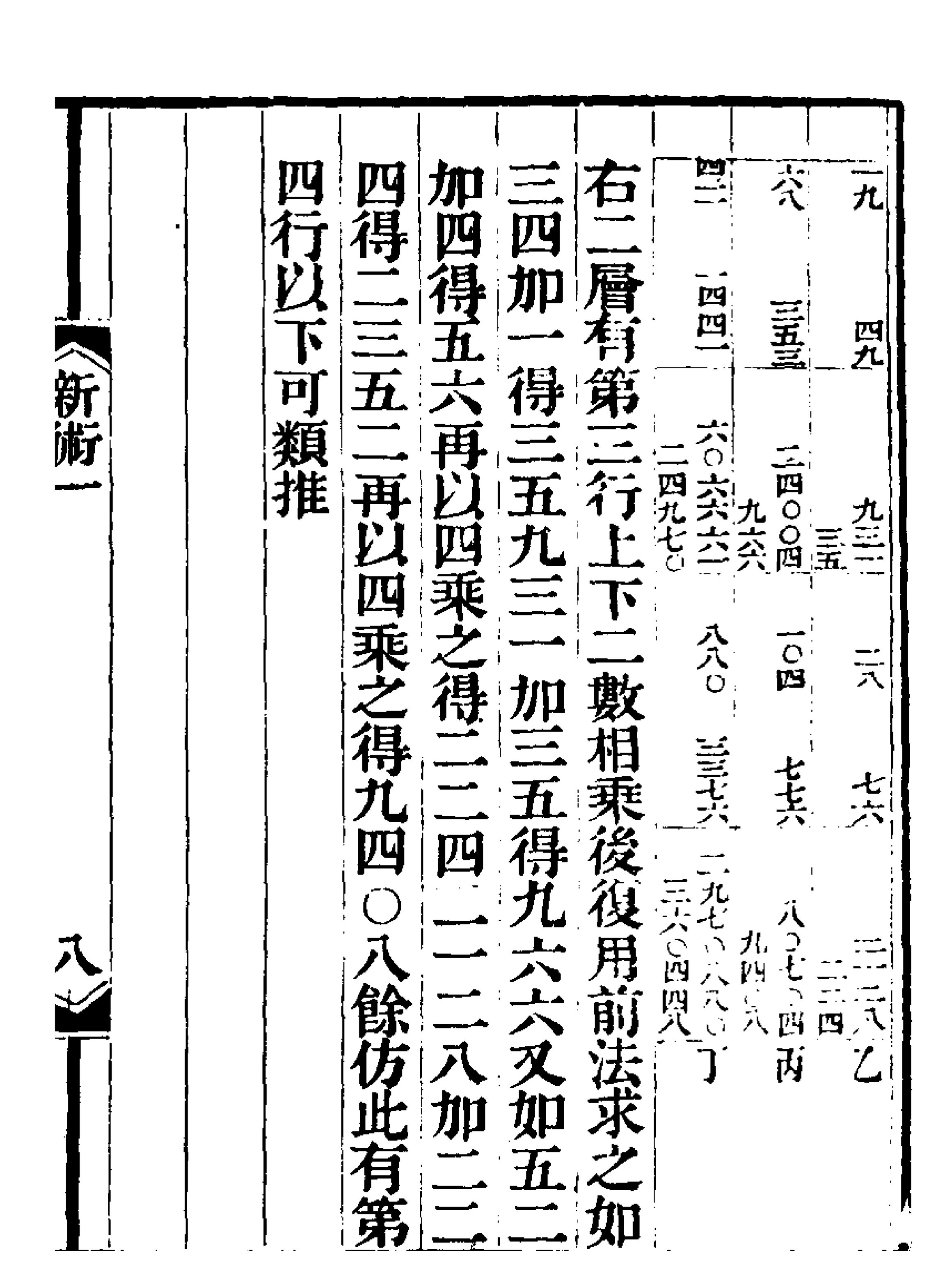
地	天	甲	乙	丙	丁
一	一	二	四	八	一六
一	一	二	四	八	一六
	一	四	一六	六四	二五六
一	一	二	七	二〇	六一
四	一	五	一三	四一	一二一
	一	一〇	九一	八二〇	七三八一
九	一	一〇	二八	一三六	四九六
	一	二〇	三三六	五四四〇	八七二九六

法列天地二行上下各二數天之二數及地之上數恆為一地之下數遞用諸平方積乃以天之下數乘地之上數加天之上數為甲之上數以天之上數乘地之下

數加天之下數爲甲之下數次以甲二數代天二數如法求得乙二數復以乙二數代天二數如法求得丙二數順是以下皆如是求畢乃以逐行各二數上下相乘即得前法一二兩行相併各數其次行各層俱爲一即子係數中之數也

右諸層無第三行無須更求若有第三第四諸行必更求之

地	天	甲
一	一	二
一六	一	一七
	一	三四　一
一	一	二
二五	一	二六
	一	五二　四



一九	四九	九三一	二八	七六	三二二八	乙
		三五			二二四	
六八	三五三	二四〇〇四	一〇四	七七六	八〇七〇四	丙
		九六六			九四〇八	
四二	一四四一	六〇六六六二	八八〇	三三七六	一二九七〇六八〇	丁
		二四九七〇			三三六〇四四八	

右二層有第三行上下二數相乘後復用前法求之如三四加一得三五九三一　加三五得九六六又如五二一加四得五六再以四乘之得二二四二二八加二二四得二三五二再以四乘之得九四〇八餘仿此有第四行以下可類推

橢圜新術

無錫徐壽校

橢圜拾遺卷一　　則古昔齋算學九

海寧李善蘭學

舊譯圜錐曲綫說遺義尚多而橢圜爲天算家所恒用故亟爲補之雙曲拋物二綫可例推也

凡橢圜正交長徑之正弦與長徑上平圜正弦比恒如小半徑與大半徑比款

甲丙乙丁爲橢圜甲子乙丑爲平圜甲心乙心爲大半徑與子心丑心等丙心丁心爲小半徑寅辰巳未爲平圜正弦卯辰午未爲橢圜正弦款言

卯辰與寅辰比或午未與巳未比恒如丙心與子心比

蓋平圜側視之卽成橢圜平圜諸正弦恒爲弦側視所成橢圜諸正弦恒爲句成無數等勢句股形故比例恒同也

凡橢圜正交短徑之正弦與短徑上平圜之正弦比恒如大半徑與小半徑比二款

甲丙乙丁爲橢圜丙子丁丑爲短徑上之平圜丙心丁心爲小半徑與子心丑心等甲心乙心爲大半徑戊庚辛癸爲橢圜正弦己庚壬癸爲平圜

正弦款言戊庚與己庚比或辛癸與壬癸比恒如甲心與子心比　蓋橢圜從長徑端側視之長徑必稍短漸側漸短至與短徑等卽成平圜矣橢圜諸正弦恒爲弦側視所成平圜諸正弦恒爲句成無數等勢句股形故比例恒同也

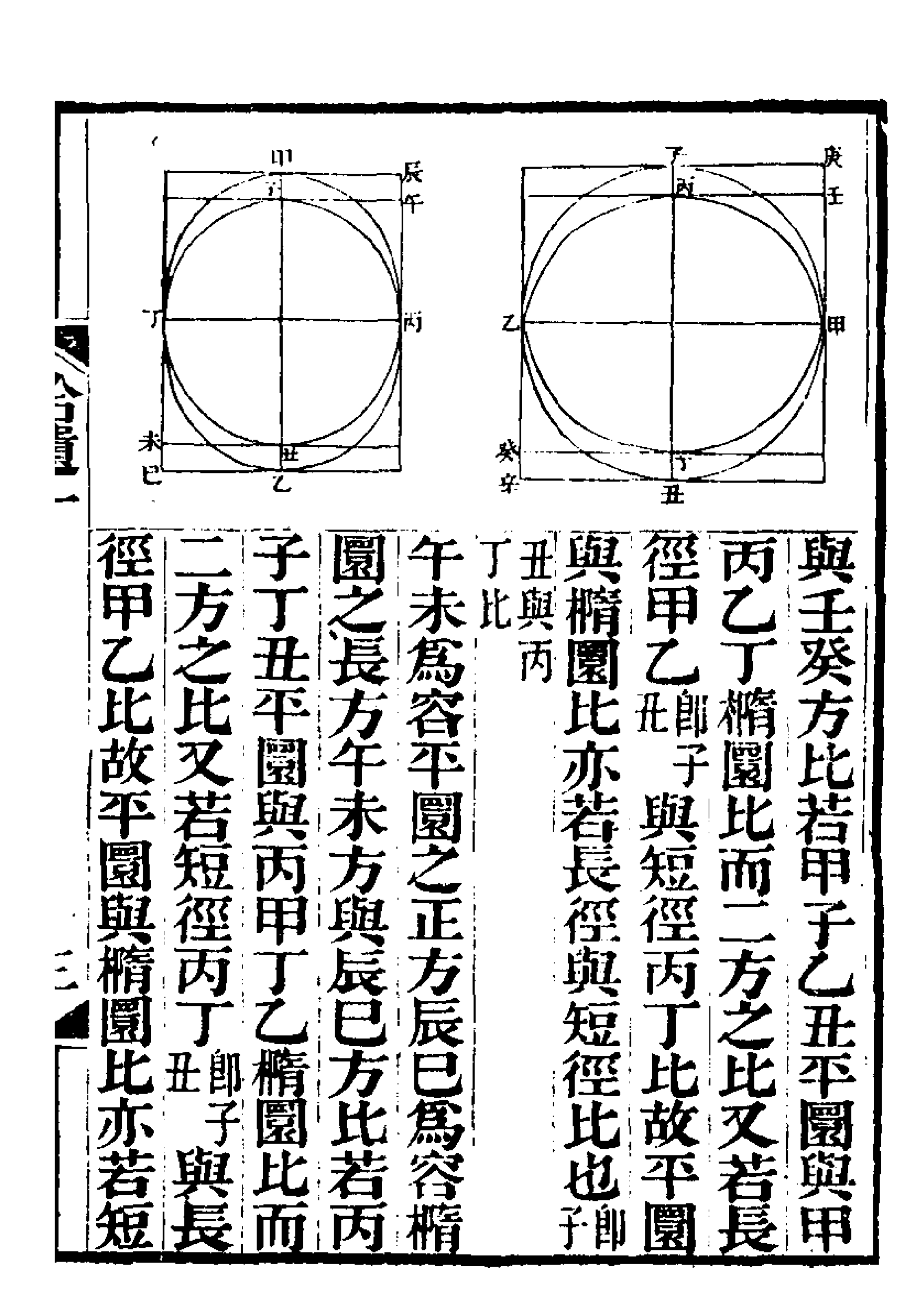
凡橢圜斜交斜徑之正弦與斜徑上平圜之正弦比恒如半屬徑與半斜徑比三款

甲丙乙丁爲橢圜甲子乙丑爲斜徑上平圜甲心乙心爲半斜徑與子心丑心等丙丁爲屬徑丙心丁心爲半屬徑午未卯辰爲橢圜正弦巳未寅辰爲平圜正弦款

言午未與巳未比或卯辰與寅辰比恒如丙心與子心比　試置橢圜柱自短徑端斜截之令成平圜面復自長徑端斜截之仍爲橢圜面令二面之交線過柱心則交線即斜徑二面諸正弦與圜柱周諸直線成無數等勢三角形故比例恒同也

橢圜與長徑上平圜比如短徑與長徑比與短徑上平圜比如長徑與短徑比四款

庚辛爲容平圜之正方壬癸爲容橢圜之長方庚辛方



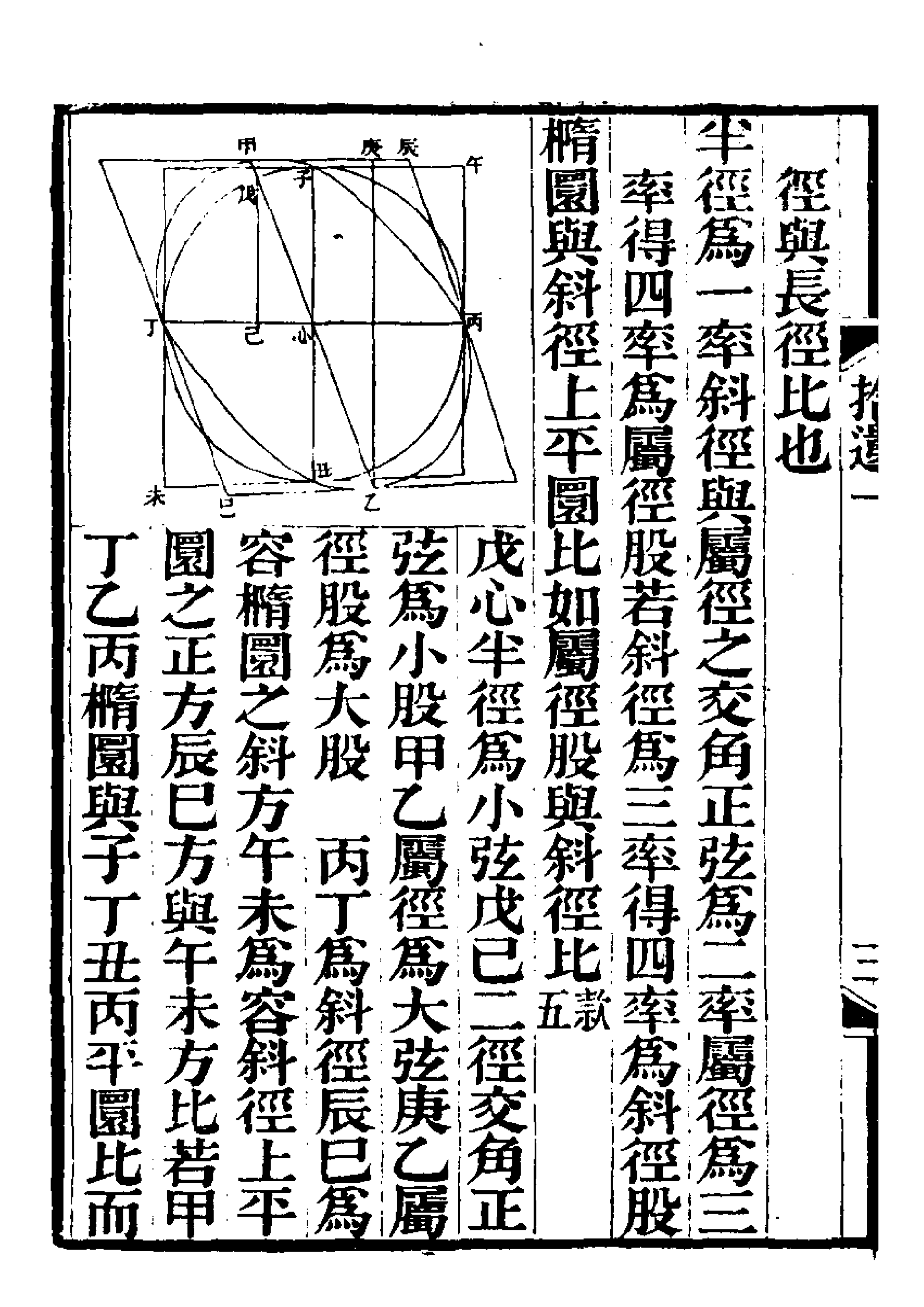
與壬癸方比若甲子乙丑平圜與甲丙乙丁橢圜比而二方之比又若長徑甲乙即子丑與短徑丙丁比故平圜與橢圜比亦若長徑與短徑比也即子丑與丙丁比

午未爲容平圜之正方辰巳爲容橢圜之長方午未方與辰巳方比若丙子丁丑平圜與丙甲丁乙橢圜比而二方之比又若短徑丙丁即子丑與長徑甲乙比故平圜與橢圜比亦若短

徑與長徑比也

半徑爲一率斜徑與屬徑之交角正弦爲二率屬徑爲三率得四率爲屬徑股若斜徑爲三率得四率爲斜徑股

橢圜與斜徑上平圜比如屬徑股與斜徑比五款

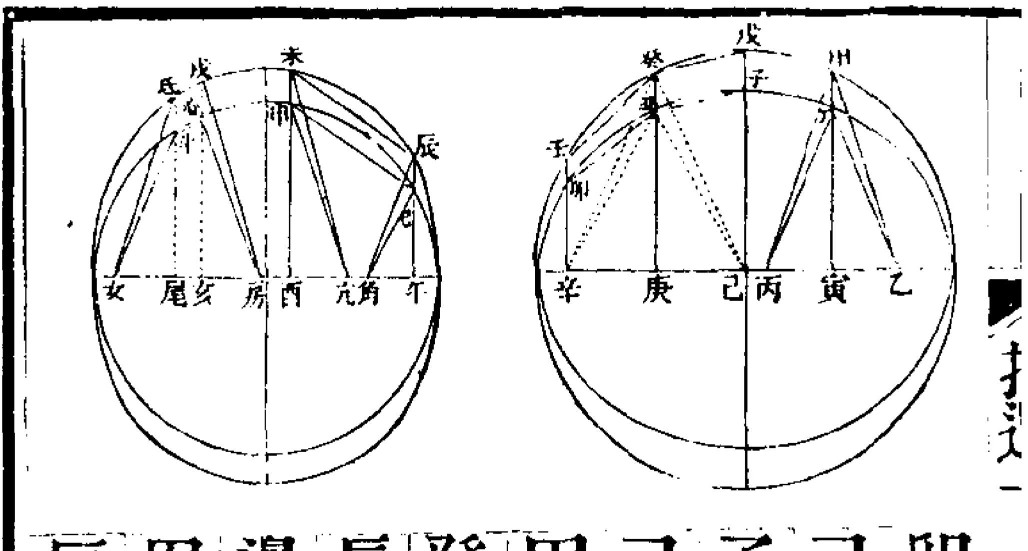


戊心半徑爲小弦戊巳二徑交角正弦爲小股甲乙屬徑爲大弦庚乙屬徑股爲大股　丙丁爲斜徑辰巳爲容橢圜之斜方午未爲容斜徑上平圜之正方辰巳方與午未方比若甲丁乙丙橢圜與子丁丑丙平圜比而

二方之比又若屬徑股庚乙與斜徑丙丁即子丑比故橢圜與平圜比亦若屬徑股與斜徑比

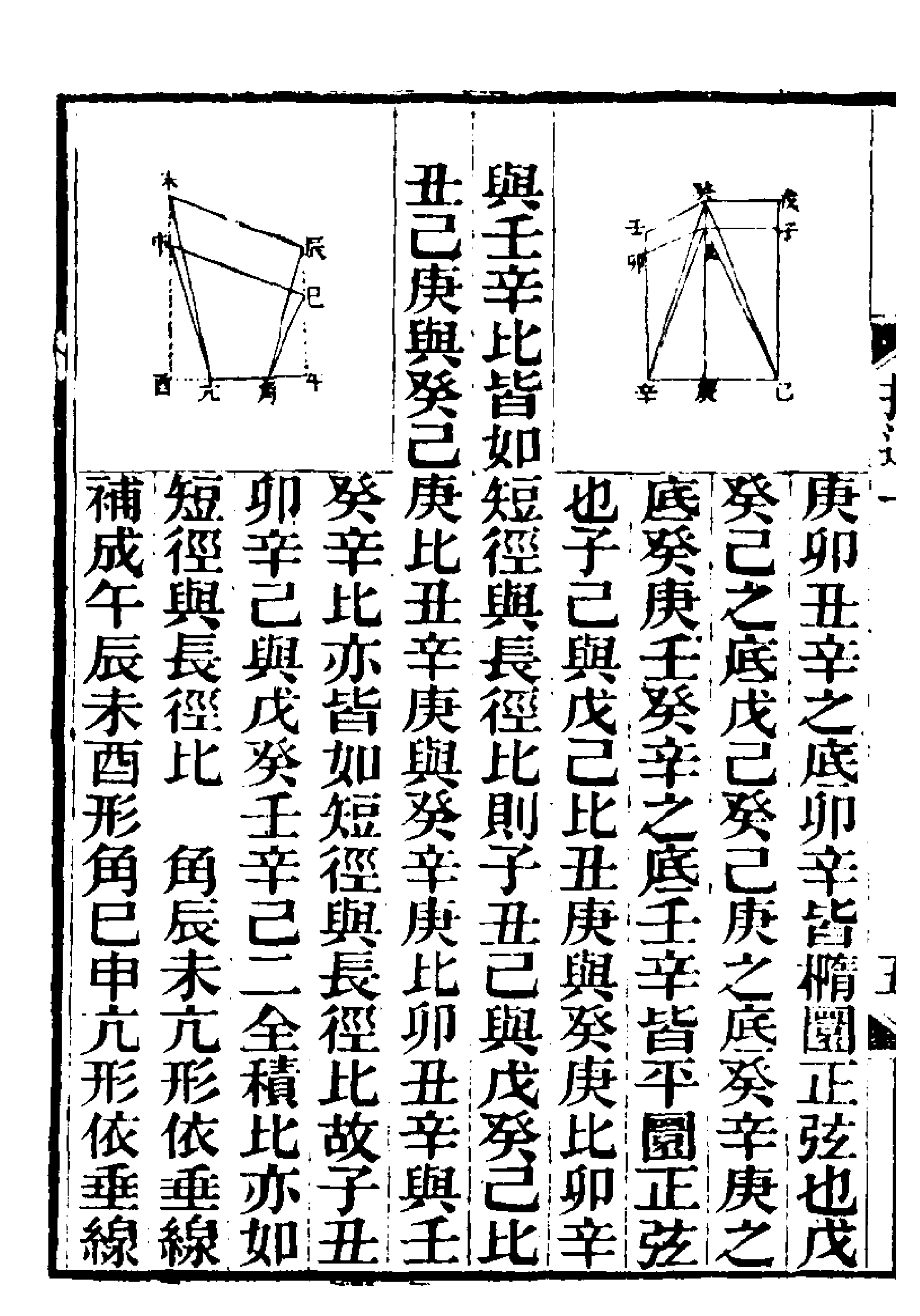
凡橢圜與長徑上平圜二圜內所有三角及諸邊形若同用一底在長徑內切圜周諸角俱在一个垂線內則其面積之比恒如短徑與長徑比凡橢圜與短徑上平圜二圜內所有三角及諸邊形若同用一底在短徑內切圜周諸角俱在一个垂線內則其面積之比恒如長徑與短徑比 六款

丁乙丙爲橢圜內三角形甲乙丙爲平圜內三角形同用乙丙底切圜周甲丁二角俱在甲寅垂線內又子丑



卯辛己爲楕圜內五邊形戊癸壬辛己爲平圜內五邊形同用己辛底戊子二角癸丑二角壬卯二角同在戊己癸庚壬辛三垂線內款言丁乙丙甲乙丙二三角形比子丑卯辛己戊癸壬辛己二五邊形比俱如短徑與長徑比又圖角辰未亢爲楕圜內四邊形角巳申亢爲平圜內四邊形同用角亢底巳辰二角申未二角同在辰午未酉二垂線內又房戌氐女爲

橢圜內四邊形房心斗女為平圜內四邊形同用房女底戌心二角氐斗二角同在戌亥氐尾二垂線內款言角辰未亢角巳申亢二形比房戌氐女房心斗女二形比俱如長徑與短徑比　凡三角形同底則其積之比如高之比丁乙丙之高丁寅乃橢圜正弦也甲乙丙之高甲寅乃平圜正弦也凡橢圜平圜二正弦比如小半徑與大半徑比一款亦如短徑與長徑比故二積之比亦如短徑與長徑比也凡三角形同高則其積之比如底之比子丑卯辛己戌癸壬辛己二五邊形可各分為四三角形子丑己之底子己丑己庚之底丑辛庚之底丑



庚卯丑辛之底卯辛皆楕圜正弦也戊癸己之底戊己癸己庚之底癸辛庚之底癸庚壬癸辛之底壬辛皆平圜正弦也子己與戊己比丑庚與癸庚比卯辛與壬辛比皆如短徑與長徑比則子丑己與戊癸己比丑己庚與癸己庚比丑辛庚與癸辛庚比卯丑辛與壬癸辛比亦皆如短徑與長徑比故子丑卯辛己與戊癸壬辛己二全積比亦如短徑與長徑比　角辰未亢形依垂線補成午辰未酉形角巳申亢形依垂線

補成午巳申酉形辰午與巳午比未酉與申酉比皆如長徑與短徑比二款則午辰未酉形與午巳申酉形比亦如長徑與短徑比詳前理而辰午角巳午角二三角形比未酉亢申酉亢二三角形比亦皆如長徑與短徑比詳前理則其較積角辰未亢與角巳申亢二形比必如長徑與短徑比矣　房戌氐女形依垂線分為一四邊二三角形房心斗女形亦分為一四邊二三角形其垂線戌亥與心亥比氐尾與斗尾比皆如長徑與短徑比則亥戌氐尾與亥心斗尾二四邊形比亥

戌 氐 心 斗 女 尾 亥 房

戊房亥心房二三角形比尾氐女尾斗女二三角形比亦皆如長徑與短徑比故其和積房戊氐女與房心斗女二形比亦必如長徑與短徑比也

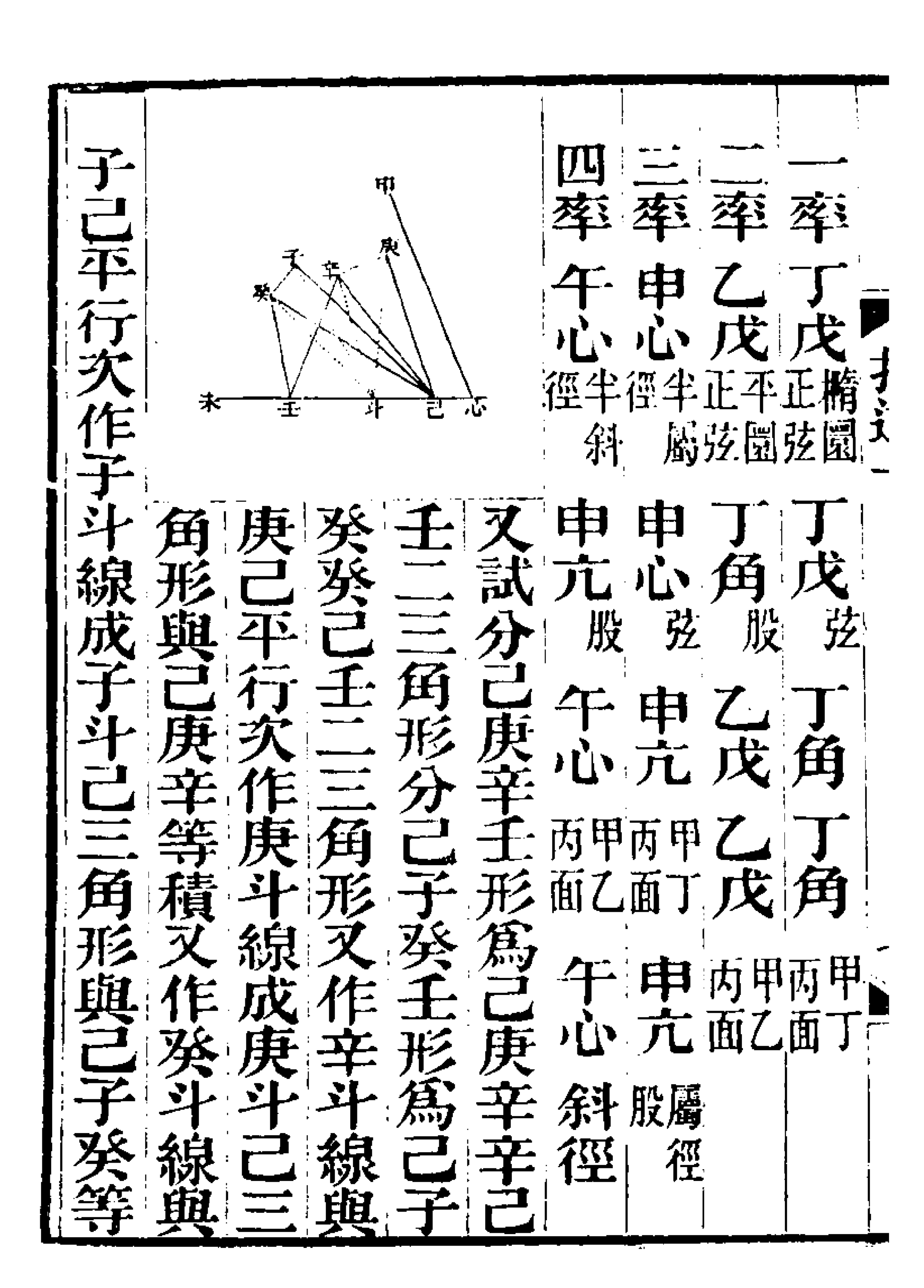


凡橢圜及斜徑上平圜二圜內所有三角及諸邊形若同用一底在斜徑內切圜周諸角作線一與屬徑平行一正交斜徑俱遇于斜徑內一點則其面積之比恒如屬徑股與斜徑比七款

甲乙丙為平圜內三角形甲丁丙為橢圜內三角形同用一甲丙底在午

求斜徑內切圜周乙角作線正交斜徑于戊切橢圜周丁角作線與申酉屬徑平行亦交斜徑于戊又己庚辛壬爲平圜內四邊形己子癸壬爲橢圜內四邊形同用一己壬底在斜徑內圜周庚辛二角作線正交斜徑于丑于卯橢圜周子癸二角作線與屬徑申酉平行亦交斜徑于丑于卯款言甲丁丙甲乙丙二三角比己子癸壬己庚辛壬二四邊形比皆如屬徑股與斜徑比

試于丁點作丁角線正交斜徑又作半屬徑股申亢則有比例如左用三款例



一率	丁戊 橢圜正弦	丁戊 弦	丁角	丁角	甲丁丙面	
二率	乙戊 平圜正弦	丁角 股	乙戊	乙戊	甲乙丙面	
三率	申心 半屬徑	申心 弦	申亢	甲丁丙面	申亢	屬徑股
四率	午心 半斜徑	申亢 股	午心	甲乙丙面	午心	斜徑

又試分己庚辛壬形爲己庚辛辛己壬二三角形分己子癸壬形爲己子癸癸己壬二三角形又作辛斗線與庚己平行次作庚斗線成庚斗己三角形與己庚辛等積又作癸斗線與子己平行次作子斗線成子斗己三角形與己子癸等

積準前三角例本款則得

一率　癸己壬　子丑己卯己子癸　己子癸壬

二率　辛己壬　庚丑己卯己庚辛　併之　己庚辛壬

三率　屬徑股　屬徑股　得　屬徑股

四率　斜徑　斜徑　斜徑

橢圜正交長徑之正弦與長徑上平圜正弦比如短徑上平圜餘弦與橢圜餘弦比八款

卯辰爲橢圜正弦寅辰爲長徑上平圜正弦卯午爲橢圜餘弦己午爲短徑上平圜餘弦卯辰與寅辰比若小半徑與大半徑比一款巳午與卯午比亦若小半徑與大

半徑比（二款）故卯辰與寅辰比若巳午與卯午比也

橢圜交斜徑之正弦與斜徑上平圜正弦比如屬徑上平圜餘弦與橢圜餘弦比（九款）

甲乙爲斜徑丙丁爲屬徑子丑爲交斜徑正弦子卯爲斜徑上平圜正弦丑寅爲斜餘弦辰寅爲屬徑上平圜

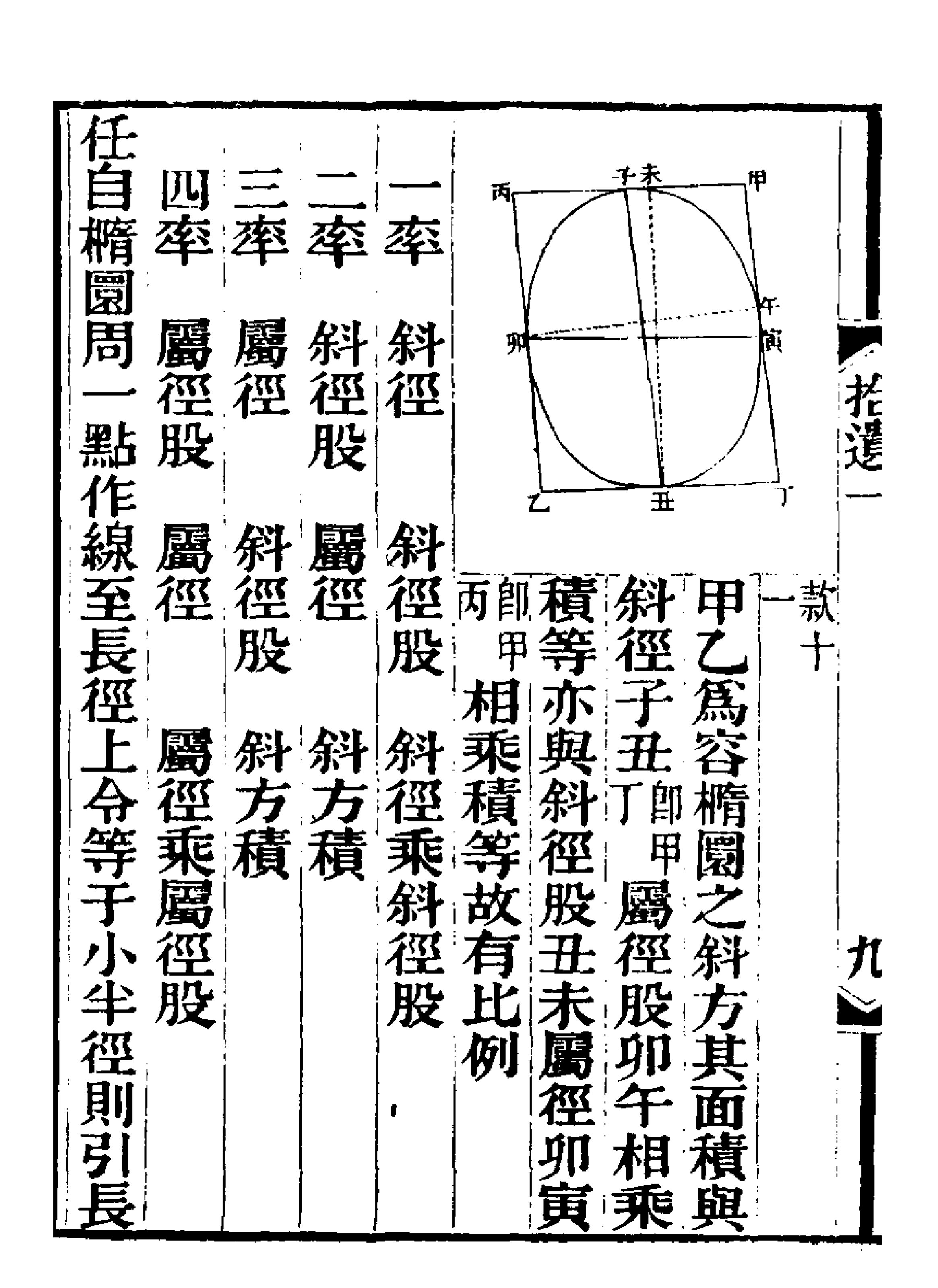
餘弦子丑與子卯比若半屬徑心丁與半斜徑心甲比三款辰寅與丑寅比亦若半屬徑心丁與半斜徑心甲比三款故子丑與子卯比若辰寅與丑寅比也

短徑方長徑方之中率爲容橢圓之長方十款

短徑方與長方比長方與長徑方比皆如短徑與長徑比故長方爲中率

斜徑乘斜徑股屬徑乘屬徑股其中率爲容橢圓之斜方

一款十一



甲乙為容橢圜之斜方其面積與斜徑子丑即甲丁屬徑股卯午相乘積等亦與斜徑股丑未屬徑卯寅即甲丙相乘積等故有比例

一率　斜徑　　斜徑股　斜徑乘斜徑股

二率　斜徑股　屬徑　　斜方積

三率　屬徑　　斜徑股　斜方積

四率　屬徑股　屬徑　　屬徑乘屬徑股

任自橢圜周一點作線至長徑上令等于小半徑則引長

之至短徑必等于大半徑款十二

任于橢圜周子點作線至長徑丑點令子丑等于小半徑則引長之至短徑寅點子寅必等大半徑



試于長短二徑上各作平圜又于子點作橢圜正弦子卯餘弦子辰午卯爲長徑上平圜正弦未辰爲短徑上平圜餘弦辰心等于子卯卯心等于子辰子卯與午卯比若未辰與子辰比款八則未辰心午卯心爲同式句股形以午心未心大小二半徑爲弦子丑旣等于小半徑未心則必與

未心平行蓋同以子辰卯心二平行線為界故也引長之至寅必與大半徑午心等蓋既與午心平行又同以午卯辰寅二平行線為界故也用十字槽作橢圜周即此款之理也

大半徑減兩心差為卑徑大半徑加兩心差為高徑兩心各出線遇于橢圜周為二交徑自遇點作正弦分長徑為二分為大小二矢二交徑內各減卑徑為大小二徑較以二交徑各減高徑亦為大小二徑較

大小二徑較比如大小二矢比款十三

甲丙甲丁為二交徑庚乙為小矢辛乙為大矢丁己等

于丁辛丙戊等于丙庚甲己爲大徑較甲戊爲小徑較
款言辛乙與庚乙比若甲己與甲戊比　試以甲丙丁
爲三角形取心點作心子心丑心寅爲三邊之垂線三



線必相等子甲與丑甲子丙與寅丙
丑丁與寅丁亦必兩兩相等故子甲
與丙戊等丑甲與丁己等蓋甲丙甲
丁和與長徑等子丙丑丁和與丙丁
等則子甲丑甲和必與庚丙辛丁和
等而子甲丑甲相等故子甲與庚丙
等卽亦與丙戊等丑甲與辛丁等卽

亦與丁己等也乃與甲丙平行作心卯線又與甲丁平行作心辰線又與丙丁平行作午未過心線成心子午心寅卯二相等句股形俱與甲乙丙句股形同式又成心丑未心寅辰二相等句股形俱與甲乙丁句股形同式午丙等于心卯即亦等于心午亦等于卯丙未丁等于心辰即亦等于心未亦等于辰丁心卯辰與甲丙丁為同式三角形則有比例

一率　心卯卯寅和（即子丙亦即甲戊）　子丙　甲戊

二率　甲丙丙乙和　較　甲子丙乙和（即庚乙）　庚乙

三率　心辰辰寅和（即丑丁亦即甲己）　之　丑丁　甲己

四率　甲丁丁乙和　甲丑丁乙和(即辛乙)　辛乙

徑較與矢比恒如倍兩心差與長徑比(最卑後用卑徑較最高後用高徑較)

款十四

準前款圖有比例

一率　心辰辰寅和(即丁丑)　心辰辰寅和(徑較矢)

二率　甲丁乙和　較　甲丑丁乙和

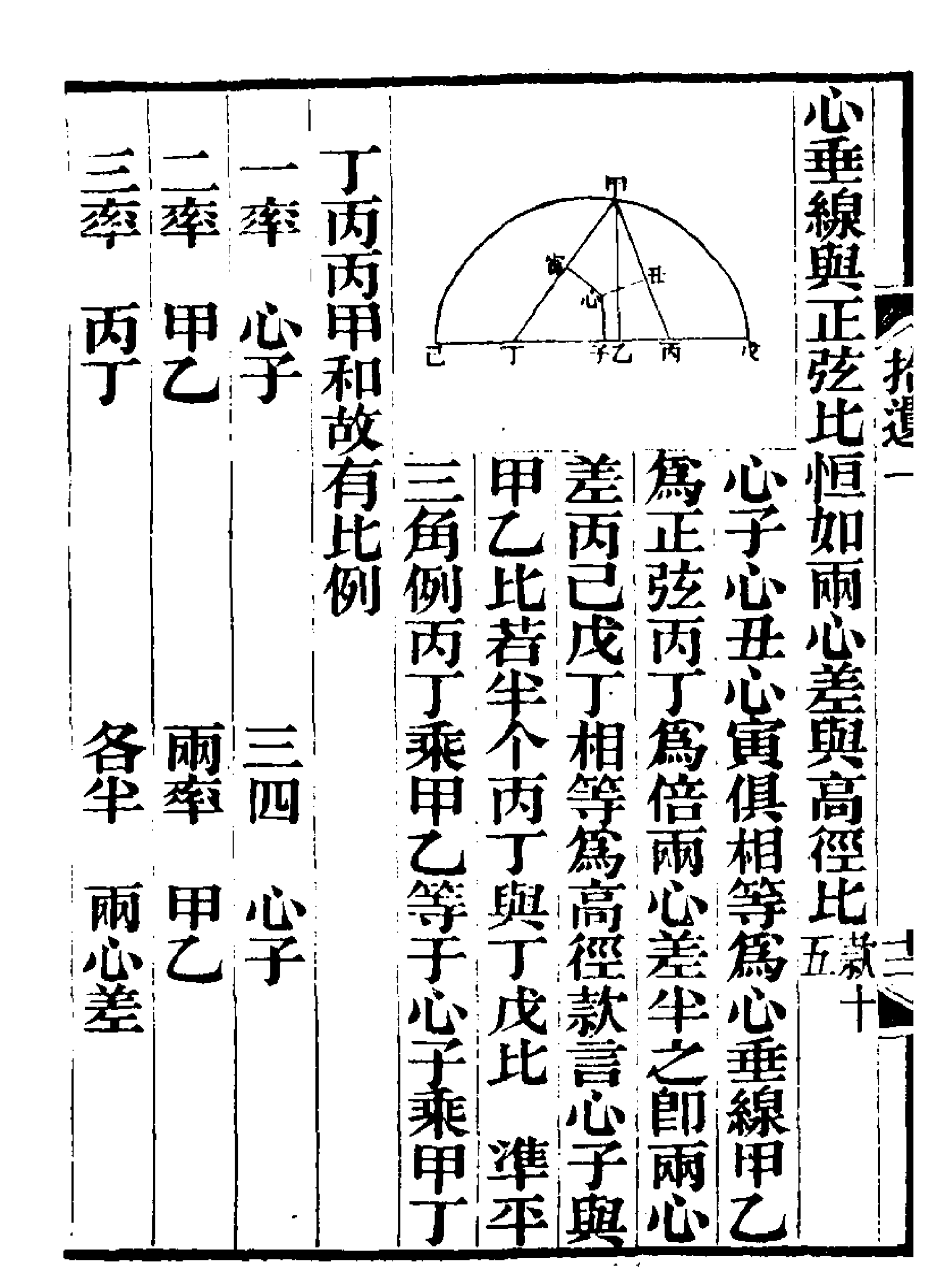
三率　心辰辰卯卯心和(即丑丁和子丙和)　之　心辰辰卯卯心和(倍兩心差丁丙)

四率　甲丁丙丙甲和　甲丑丁丙子甲和(長徑)

二交徑與倍兩心差成三角形自形心作三邊之垂線名

心垂線

心垂線與正弦比恒如兩心差與高徑比五款十



心子心丑心寅俱相等爲心垂線甲乙爲正弦丙丁爲倍兩心差半之卽兩心差丙己戊丁相等爲高徑款言心子與甲乙比若半个丙丁與丁戊比　準平三角例丙丁乘甲乙等于心子乘甲丁丁丙丙甲和故有比例

一率　心子　　三四　心子

二率　甲乙　　兩率　甲乙

三率　丙丁　　各半　兩心差

四率　甲丁丁丙丙甲和　之　高徑

任取交徑之一爲距心線距心線爲一率卑徑較爲二率卑徑爲三率得四率爲矢率高徑爲一率倍兩心差爲二率卑徑爲三率得四率爲徑率

矢率與徑率比恒如實引矢與全徑比款十六

準十五款有比例

一率	高徑	高徑	甲乙丁心子己
二率	兩心差	兩心差	爲同式句股形
三率	甲乙	甲丁	故也
四率	心子	心己	

取甲辛等于心己又以丁為心以卑徑丁卯為半徑作卯子辰半圓則丁子等于丁卯甲子等于甲辛辛庚和即心己己子和觀十三款圖說自明又取子丑令甲丁與甲辛比若子丁與子丑比夫甲辛即心己也則甲丁與甲辛比必若高徑與兩心差比故子丁與子丑比亦必若高徑與兩心差比夫高徑兩心差子丁俱為不變數故子丑亦為不變數乃合界說及今所攷得比例觀之

一率 高徑 高徑

距心線甲丁 甲丁

二率　兩心差　倍兩心差　卑徑較（甲子即甲辛辛庚和）　甲辛

三率　子丁（即卑徑）　卑徑　卑徑（子丁）　子丁

四率　子丑　徑率（倍子丑）　矢率（子丑丑寅和）　子丑

甲辛庚子丑寅為同式句股形故二一率為弦則四率亦為弦甲辛與子丑是也二一率為句弦和則四率亦為句弦和卑徑與矢率是也

卯丁甲為最卑後實引角若卯丁為半徑則卯壬為實引角之矢即子丁丁壬和也子丑寅子丁壬為同式句股形故有比例

一率　子丑丑寅和　矢率

二率　倍子丑　徑率

三率　子丁丁壬和　實引矢

四率　倍子丁辰卯即　全徑

案此款最卑後用本矢最高後則以矢減全徑用其餘下款同

有實引度求距心線法十七款

一率　全徑

二率　實引矢

三率　徑率

四率　矢率

以矢率減卑徑得較率

一率　較率

二率　卑徑

三率　卑徑

四率　距心線

解曰矢率與卑徑比若卑徑較與距心線比（前款界說）今卑徑較不可得而卑徑者卑徑較減距心線所餘也故亦以矢率減卑徑用其餘爲一率卑徑爲二率而以距心線之減餘爲三率則四率必得距心線矣

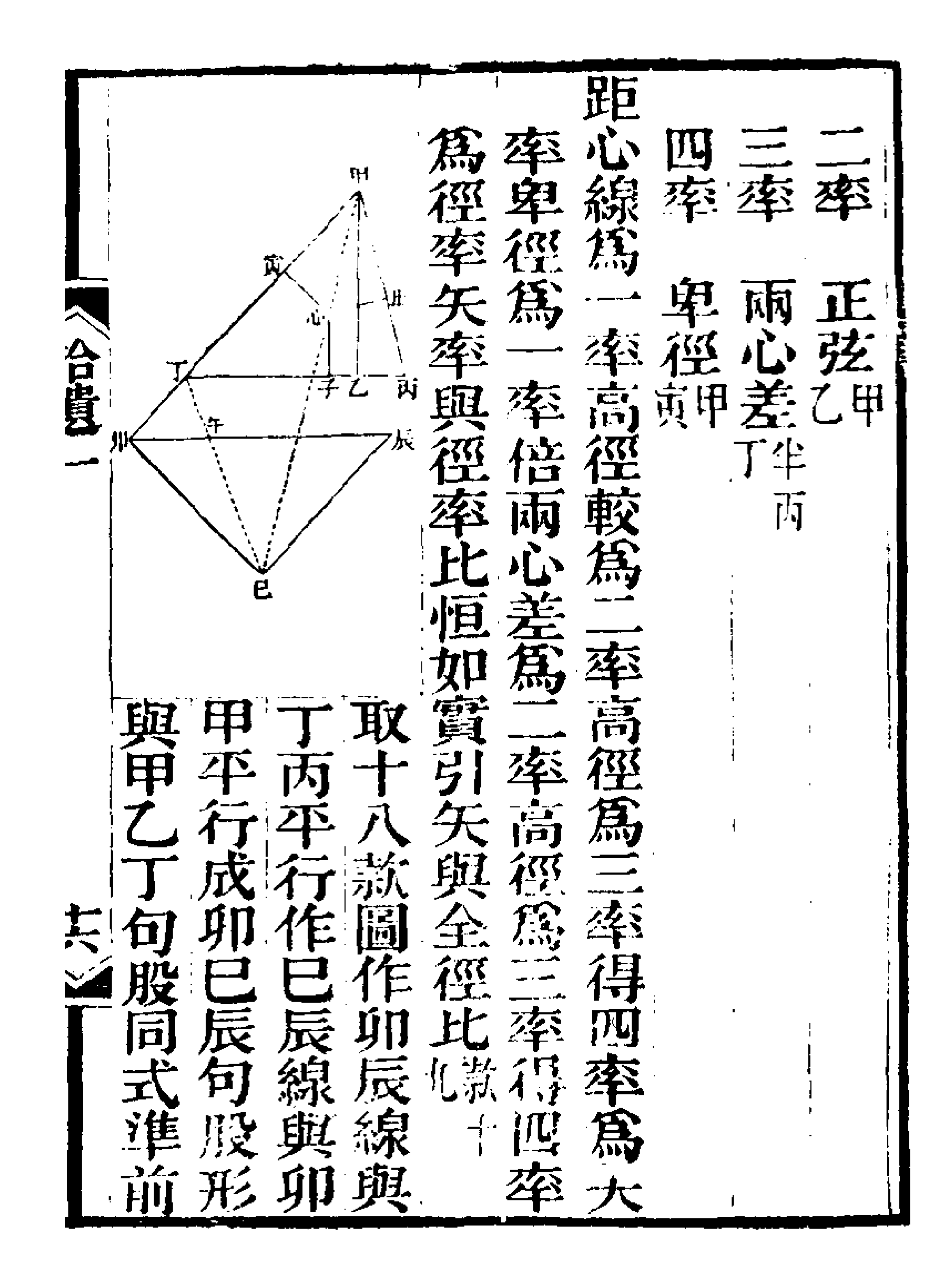
卑徑爲一率高徑爲二率心垂線爲三率得四率爲高句

高句與正弦比恒如兩心差與卑徑比十八款

準十五款心寅與甲乙比若兩心差與高徑比引長甲丁至卯令丁卯等于丙子則甲卯即高徑也又自甲過心作甲己線又與心寅平行作巳卯線即高句也甲寅心甲卯巳爲同式句股形甲寅乘巳卯等于甲卯乘心寅夫甲卯乘心寅等于正弦乘兩心差十五款則甲寅乘巳卯亦必等于正弦乘兩心差故有比例

一率　高句巳卯

二率　正弦乙甲
三率　兩心差半丙丁
四率　卑徑甲寅
距心線爲一率高徑較爲二率高徑爲三率得四率爲大
率卑徑爲一率倍兩心差爲二率高徑爲三率得四率
爲徑率矢率與徑率比恒如實引矢與全徑比十九款



取十八款圖作卯辰線與
丁丙平行作巳辰線與卯
甲平行成卯巳辰句股形
與甲乙丁句股同式準前

款有比例

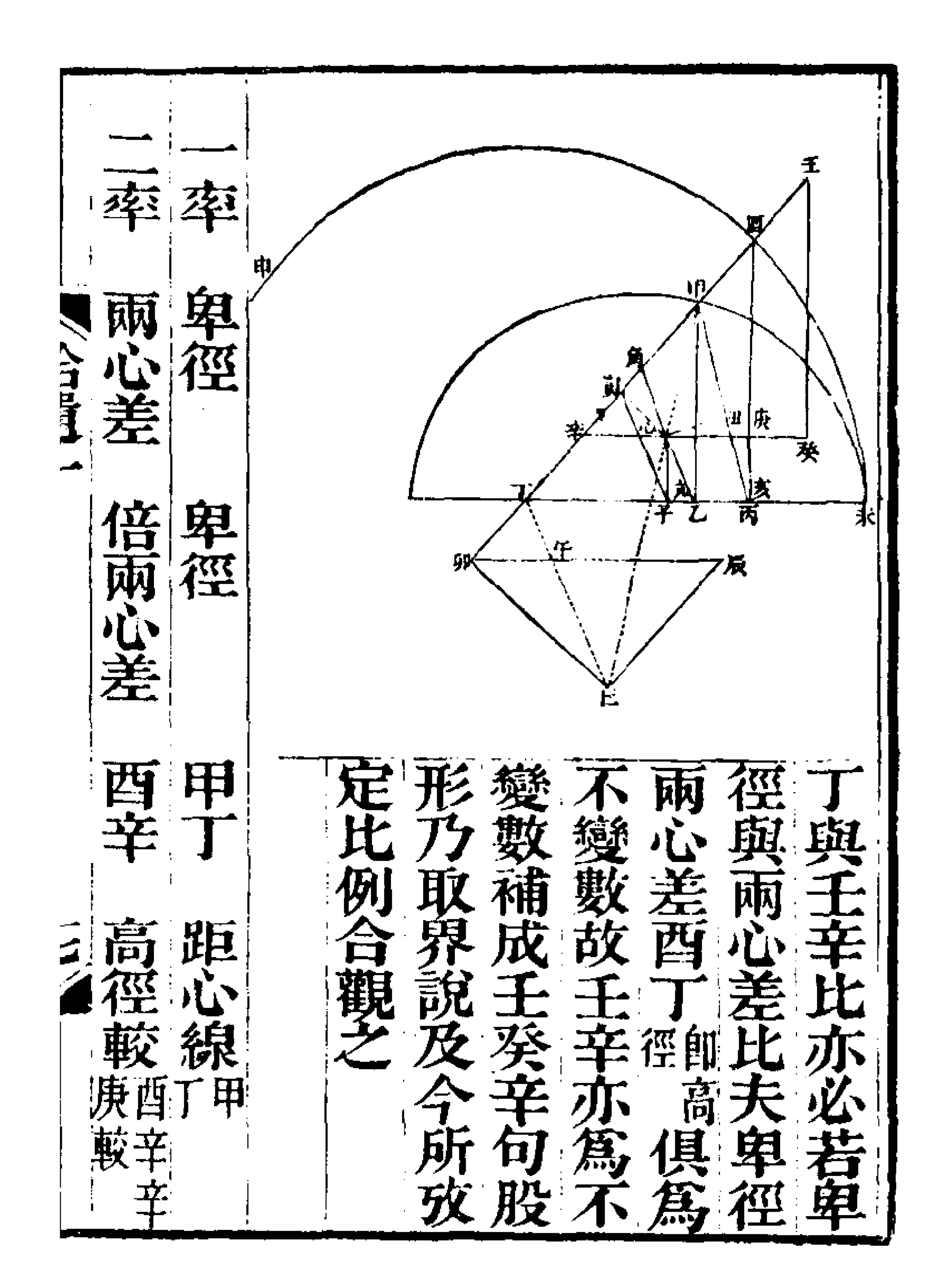
一率　卑徑　卑徑

二率　兩心差　兩心差

三率　甲乙　甲丁

四率　卯巳　卯辰

乃以丁為心以高徑丁未為半徑作未酉申半圜引長丁甲線至酉則丁酉等于丁未又取酉辛等于卯辰則酉甲等于酉辛辛庚較即卯辰辰巳較（詳解後款）又引長辛酉至壬令甲丁與酉辛比若酉丁與壬辛比夫酉辛即卯辰也則甲丁與酉辛比必若卑徑與兩心差比故酉



丁與壬辛比亦必若卑徑與兩心差比夫卑徑兩心差酉丁（徑即高）俱為不變數故壬辛亦為不變數補成壬癸辛句股形乃取界說及今所攷定比例合觀之

一率　卑徑　卑徑　甲丁　距心線（甲丁）

二率　兩心差　倍兩心差　酉辛　高徑較（酉辛辛庚較）

三率　酉丁高徑　高徑　酉丁　高徑酉丁

四率　壬辛　徑率倍壬辛　壬辛　矢率壬辛辛癸較

末丁酉爲最高後實引角若末丁爲半徑則末亥爲實引角之矢即酉丁丁亥較也壬辛癸酉丁亥爲同式句股形故有比例

一率　壬辛辛癸較　矢率

二率　倍壬辛　徑率

三率　酉丁丁亥較　實引矢

四率　倍酉丁　全徑

酉甲何以等于酉辛辛庚較也曰試作寅子線又與寅

子平行作角心亢線則角心甲角必等于亢丙心角亢心丙角必等于角甲心角蓋甲丙丁三角合之得半周三半角合之得一象限而甲角心三角合之亦得半周于角角內去一氐角心象限角尚餘一象限爲角甲心甲角氐角心甲三角之和而角甲心者甲角之半也甲角氐者丁角之半也則角心甲必爲丙角之半與亢丙心角等矣亢心丙等于角甲心理同故甲角心心亢丙爲同式三角形角甲乘亢丙必等于角心乘亢心即角心方也丁心爲分角線故角

心亢心等角寅乘角丁亦得角心方丁心角心寅角爲同式句股形故也角寅等于亢子故丙子乘甲角等于角寅乘甲丁角寅乘甲丁得一角心方加一角寅乘甲角丙子乘甲角亦得一角心方加一角寅乘甲角也然則甲丁與丙子比必若甲角與角寅比丁卯等于丙子甲寅心甲卯巳爲同式句股形甲丁與丁卯甲角與角寅比例又同則丁巳線必與角亢平行卽與寅子平行寅丁等于子丁則丁卯必等于午卯午辰必等于巳辰因巳辰與卯甲卯辰與丁未俱平行故也故卯午爲卯辰辰巳較酉甲爲高徑較等于丙子亦等于丁卯卽等于卯午故酉甲爲酉辛辛庚較卽卯辰辰巳較也

案此款最高後用本矢最卑後則以矢減全徑用其餘下款同

有實引度求距心線法款二十

一率　全徑

二率　實引矢

三率　徑率

四率　矢率

以矢率加高徑得和率

一率　和率壬厂

二率　高徑酉丁

三率　高徑酉丁

四率　距心線甲丁

解曰矢率與高徑比若高徑較與距心線比今高徑較不可得而高徑者高徑較與距心線之和也故亦以矢率加高徑用其和爲一率高徑爲二率而以距心線高徑較之和爲三率則四率必得距心線矣

無錫華蘅芳校

橢圜拾遺卷二

則古昔齋算學九

海甯李善蘭學

有一心有最卑點有橢圜周一點求餘一心法款十二

自最卑點至心作線爲卑徑自周點至心作線爲距心線以卑徑減距心線爲卑徑較自周點作線正交卑徑若距心線與卑徑成鈍角則正交卑徑引長線交點至卑點爲橢圜矢以卑徑較減矢爲矢較較乃以矢較較爲一率卑徑較爲二率倍卑徑爲三率得四率爲倍兩心差以倍兩心差加卑徑得餘一心

解曰準十四款有比例

一率　卑徑較　一二率之較爲
二率　矢　矢較較三四率
三率　倍兩心差　之較爲倍卑徑
四率　長徑　即得比例
一率　矢較較　若卑徑較與矢相等
二率　卑徑較　則爲拋物線卑徑較
三率　倍卑徑　大于矢則爲雙曲線
四率　倍兩心差

有一心有最高點有橢圜周一點求餘一心　款二十二

高點距心爲高徑周點距心爲距心線周點出線正交

高徑高點距交點爲矢以距心線減高徑爲高徑較以高徑較加矢爲矢較和乃以矢較和爲一率高徑較爲二率倍高徑爲三率得四率爲倍兩心差以倍兩心差減高徑得餘一心

解曰準十四款有比例

一率　高徑較　一二率之和爲　矢較和

二率　矢　矢較和三四率　高徑較

三率　倍兩心差　之和爲倍高徑　倍高徑

四率　長徑　卽得比例　倍兩心差

有一心有楕圜周二點其一點并知切線求餘一心款一十二

甲乙爲橢圜周二點子丑爲乙點切線求餘一心丙法

先作甲心乙心二距心線次取丑乙寅角令與子乙心角等作乙寅線復引長至丁令丁乙與甲心乙心之較等乃任取一小線爲半徑以丁甲爲心各旋規作二短弧交于午未二點乃作線過午未遇乙寅線于丙點即又一心也心丙即倍兩心差試作甲丙線必等于丁丙

解曰凡切線與二交徑成角必等于子乙心角則乙寅線必過又一心矣凡二交徑之和恒等

于全徑故心甲甲丙和與心乙乙丙和等心乙較心甲既多丁乙一分則丙乙較丙甲必少丁乙一分故以丁乙加乙丙為丁丙與丙甲等若以丙為平圜心丙甲丙丁俱半徑也作午未二小弧作午未丙線即平圜三點求心法也今已有乙寅過心線故有二點即可求也若午未丙線與乙寅平行則為拋物線若交點丙在切線之外則為雙曲線

有一心有橢圜周三點求餘一心款二十四

甲乙丙為橢圜周三點法先作心甲心乙心丙三距心線次取心丁令與心甲等作甲丁線復引長心乙至己令心己與心丙等次作甲乙庚線次作己庚線與甲丁

平行遇甲乙線于庚次作庚丙聯線乃自心點作庚丙之垂線心辛卽長徑之一分也次與庚丙平行作乙癸線乃以辛癸與乙己比若心辛與子丙比以子丙減心丙得心子與心戌等卽心點上之橢圜正弦也又以辛癸乙己和與辛癸比若心戌正弦與心壬卑徑比旣得卑徑乃以辛癸乙己較與乙己比若倍卑徑與倍兩心差比以倍兩心差加壬心得壬戌戌點卽又一心也

解曰準十四款心甲心乙心丙丙三卑徑較與壬丑壬

癸壬辛三矢比皆如倍兩心差與長徑比則心甲心乙丙二卑徑較較乙丁與心乙心丙丙二卑徑較較己乙比必如壬丑壬癸二矢較癸丑與壬癸壬辛二矢較辛癸比甲丁乙庚己乙爲同式三角形則乙丁與己乙比又必如甲乙與乙庚比故甲乙與乙庚比亦如丑癸與癸辛比而庚丙聯線必正交長徑也　心戊正弦丙卑徑較與壬心比亦如倍兩心差與長徑比故有比例

一率　辛癸　壬癸壬辛二矢較

二率　乙己　心乙心丙丙二卑徑較較

三率　心辛　壬心壬辛二矢較

四率　子丙心戊心丙內二卑徑較較

心戊正弦爲卑徑卽壬心癸與卑徑較和故有比例

一率　倍兩心差　倍兩心差　辛癸乙己和

二率　長徑　長徑　辛癸

三率　乙己　心戊內卑徑較　心壬卑徑較和卽心戊

四率　辛癸　心壬　心壬

倍卑徑爲倍兩心差與長徑之較故有比例

一率　辛癸　辛癸乙己較

二率　乙己　乙己

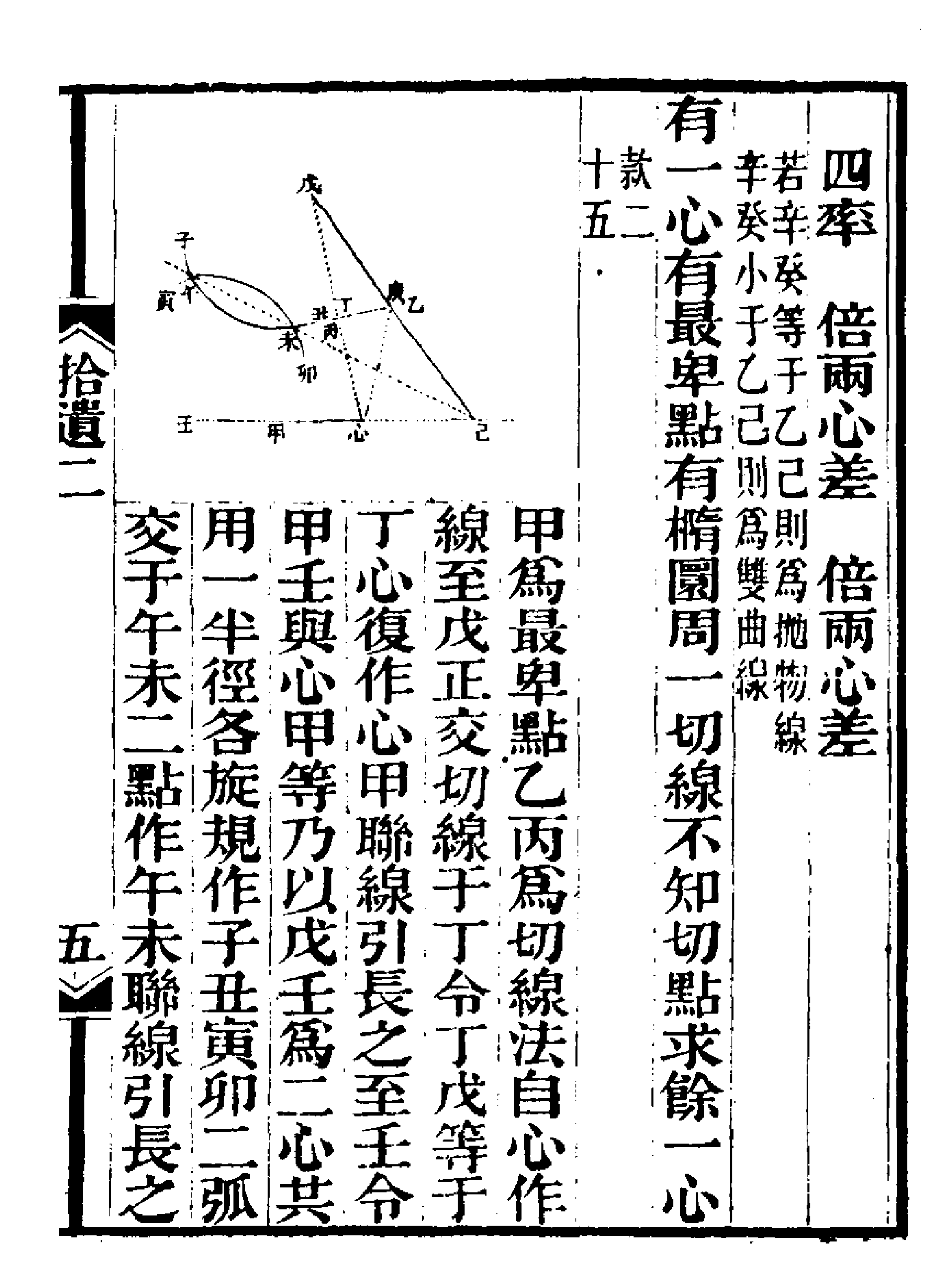
三率　長徑　長徑倍兩心差較卽倍卑徑

四率　倍兩心差　倍兩心差

若辛癸等于乙己則爲拋物線
辛癸小于乙己則爲雙曲線

有一心有最卑點有橢圜周一切線不知切點求餘一心

款二十五。



甲爲最卑點乙丙爲切線法自心作線至戊正交切線于丁令丁戊等于丁心復作心甲聯線引長之至壬令甲壬與心甲等乃以戊壬爲二心共用一半徑各旋規作子丑寅卯二弧交于午未二點作午未聯線引長之

亦引長甲心線二線交于己點卽又一心也作戊己線交切線于庚點卽切點也

解曰戊庚等于庚點距本心線戊庚丁角等于二距心線交切線角丁庚心角故丁戊當等于丁心戊己等于橢圜長徑甲己加甲壬亦等于長徑若己爲平圜心則戊己壬己皆半徑也故用平圜三點求心法作午未線引長之必遇壬心引長線于己點也若午未線與甲心線平行則爲抛物線若午未甲心交點在切線外則爲雙曲線

有一心有最高點有橢圜周一切線不知切點求餘一心

款二十六

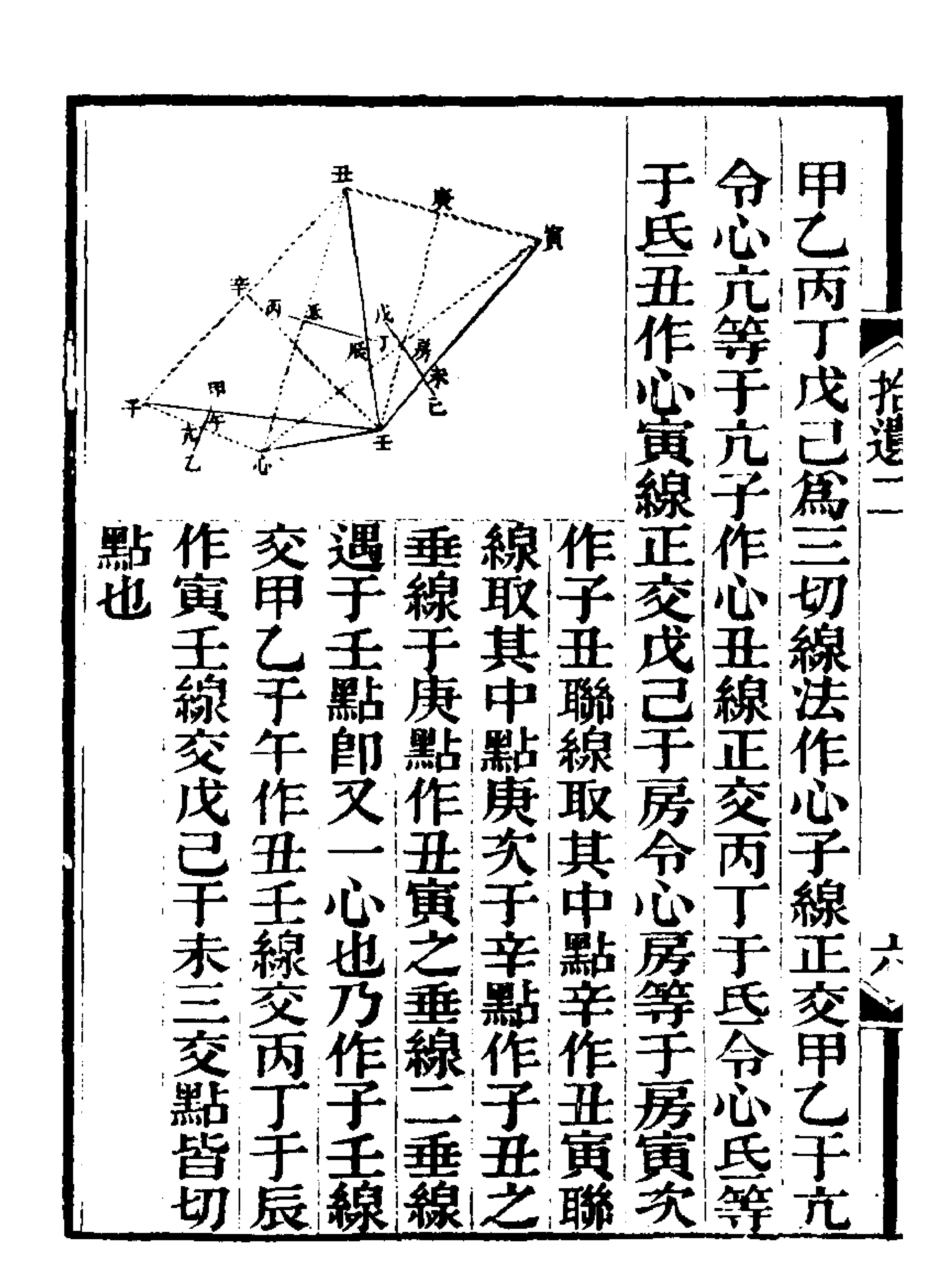
甲爲最高點乙丙爲切線法如上款作心戊線復作心

甲聯線引長之至壬令甲壬與心甲等以戊壬爲二心作子丑寅卯二弧交于午未二點作午未聯線引長之遇心甲線于己點即餘一心也作戊己線交切線于庚點即切點也

解曰心壬線內減心己餘己壬等于橢圜長徑餘理與上款同

有一心有橢圜周三切線俱不知切點求餘一心 款二十七

甲乙丙丁戊己爲三切線法作心子線正交甲乙于亢令心亢等于亢子作心丑線正交丙丁于氐令心氐等于氐丑作心寅線正交戊己于房令心房等于房寅次



作子丑聯線取其中點辛作丑寅聯線取其中點庚次于辛點作子丑之垂線于庚點作丑寅之垂線二垂線遇于壬點卽又一心也乃作子壬線交甲乙于午作丑壬線交丙丁于辰作寅壬線交戊己于未三交點皆切點也

解曰子壬丑壬寅壬皆與楕圜長徑等若壬爲平圜心則三線皆平圜半徑也作子丑丑寅二聯線作辛壬庚壬二垂線亦三點求心法也若二垂線平行則爲拋物線若二垂線之交點在切線外則爲雙曲線

有一心有楕圜周一點有二切線俱不知切點求餘一心

款二十八

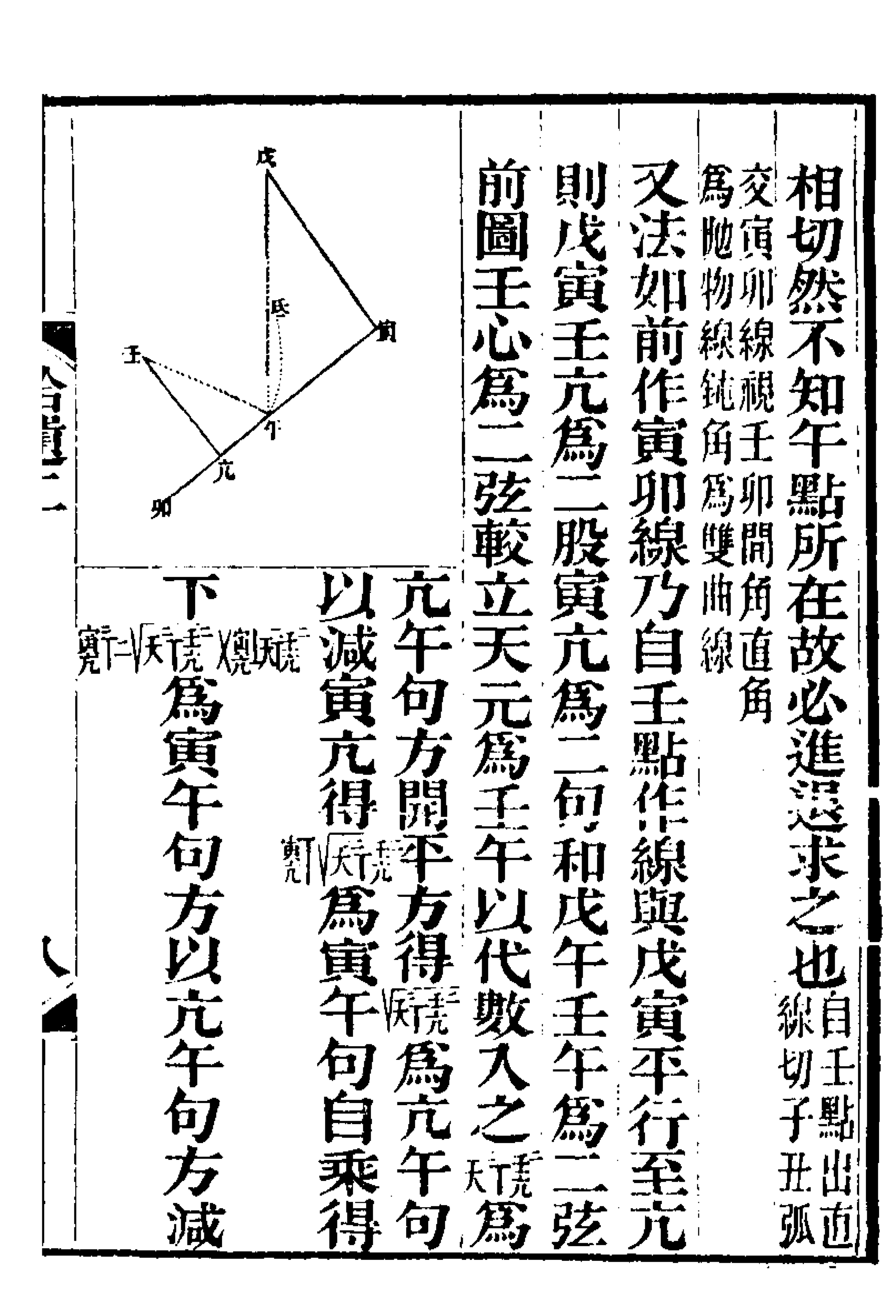
壬爲楕圜周一點甲乙丙丁爲二切線法作心戊心己二線正交丙丁甲乙令心庚與庚戊等心辛與辛己等次作戊己聯線中分之于寅次于寅點作戊己之垂線寅卯次取戊子令等于心壬以戊爲心以子爲界旋規

作子丑弧復于寅卯線內進退取午點爲心以壬點爲界旋規作弧令與子丑弧恰相切如壬癸卽定午點爲又一心

解曰準前款理寅卯線必過又一心故又一心午必在寅卯線內凡二交徑之和必等于長徑則壬午距線必等于心壬與長徑較戊午距線等于長徑以戊爲心以壬心爲半徑作子丑弧則此弧距午之最近點必與壬午距線等故以午爲心以壬爲界作弧必與子丑弧恰

相切然不知午點所在故必進退求之也自壬點出直線切子丑弧交寅卯線視壬卯間角直角爲抛物線鈍角爲雙曲線

又法如前作寅卯線乃自壬點作線與戊寅平行至亢則戊寅壬亢爲二股寅亢爲二句和戊午壬午爲二弦前圖壬心爲二弦較立天元爲壬午以代數入之$天\top壬亢^{二}$爲亢午句方開平方得$\sqrt{天^{二}\top壬亢^{二}}$爲亢午句以減寅亢得$寅亢\top\sqrt{天^{二}\top壬亢^{二}}$爲寅午句自乘得下$寅亢^{二}\top二寅亢\sqrt{天^{二}\top壬亢^{二}}\perp天^{二}\top壬亢^{二}$爲寅午句方以亢午句方減



之得 $\text{寅}^{二}\text{元}^{二}\,丅\,二\sqrt{\text{天}^{二}\,丅\,\text{元}^{二}}\ \text{寅}^{二}\text{元}^{二}$ 爲二句方較寄左 天元加壬心得 $天\,丄\,\frac{壬}{心}$ 自乘得 $\text{天}^{二}\,丄\,\frac{二天壬}{心}\,丄\,\frac{\text{壬}^{二}}{\text{心}^{二}}$

以天減之得 $\frac{二天壬}{心}\,丄\,\frac{\text{壬}^{二}}{\text{心}^{二}}$ 爲二弦方較以二股方較 $\frac{\text{戊}^{二}}{\text{寅}^{二}}\,丅\,\frac{\text{壬}^{二}}{\text{元}^{二}}$ 減之得 $\frac{二天壬}{心}\,丄\,\frac{\text{壬}^{二}}{\text{心}^{二}}\,丅\,\frac{\text{戊}^{二}}{\text{寅}^{二}}\,丄\,\frac{\text{壬}^{二}}{\text{元}^{二}}$

爲同數與寄左數並列得 $\frac{\text{寅}^{二}}{\text{元}^{二}}\,丅\,\sqrt{\frac{天^{二}}{元^{二}}}\ \frac{\text{寅}^{二}}{\text{元}^{二}}=\frac{二天壬}{心}\,丄\,\frac{\text{壬}^{二}}{\text{心}^{二}}\,丅\,\frac{\text{戊}^{二}}{\text{寅}^{二}}\,丄\,\frac{\text{壬}^{二}}{\text{元}^{二}}$ 變之得 $\sqrt{\text{天}^{二}\,丅\,\frac{\text{壬}^{二}}{\text{元}^{二}}}=\frac{\frac{二\text{寅}^{二}}{\text{元}^{二}}}{\frac{\text{寅}^{二}}{\text{元}^{二}}\,丅\,\frac{二天壬}{心}\,丅\,\frac{\text{壬}^{二}}{\text{心}^{二}}\,丄\,\frac{\text{戊}^{二}}{\text{寅}^{二}}\,丅\,\frac{\text{壬}^{二}}{\text{元}^{二}}}$ 兩邊各自乘

得式如左

[illegible]

變之得

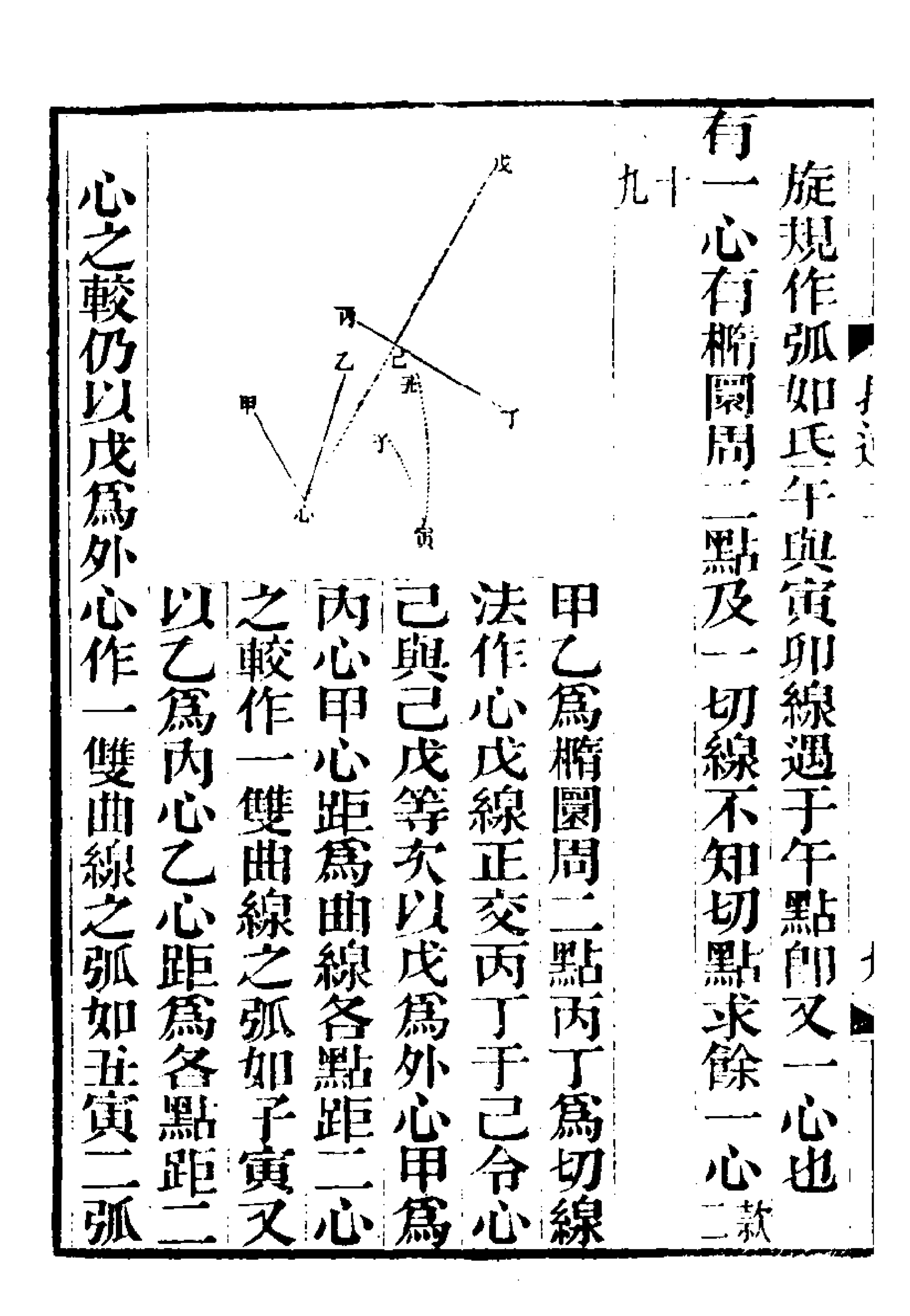
[illegible]

開平方得壬午乃以壬爲心以壬午爲半徑

旋規作弧如丑午與寅卯線遇于午點卽又一心也

有一心有橢圜周二點及一切線不知切點求餘一心 二款

十九



甲乙爲橢圜周二點丙丁爲切線法作心戊線正交丙丁于己令心己與己戊等次以戊爲外心甲爲丙心甲心距爲曲線各點距二心之較作一雙曲線之弧如子寅又以乙爲丙心乙心距爲各點距二心之較仍以戊爲外心作一雙曲線之弧如丑寅二弧

交于寅點即又一心也

解曰甲點距又一心較戊點距又一心少甲心一分所作雙曲線子寅其各點距甲與距戊之較恆等于甲心則此雙曲線必過又一心乙點距又一心較戊點距又一心少乙心一分所作雙曲線丑寅其各點距乙與距戊之較恆等于乙心則此雙曲線亦必過又一心故二曲線之交點寅必為又一心也若二曲線不相交則為拋物線若交點在切線外則為雙曲線

無錫華蘅芳校

橢圜拾遺卷三

則古昔齋算學九
海甯李善蘭學

以兩心差乘矢之級數半徑除之爲徑較之級數十款三
準十四款長徑與倍兩心差比如矢與徑較比命長徑
爲二則半長徑卽平圜半徑也一二率俱半之三四率
俱用級數卽爲半徑與兩心差比如矢之級數與徑較
級數比也

以徑較級數加卑徑爲最卑後距心線之級數十款三
最卑後以卑徑減距心線得徑較故以徑較級數加卑
徑得距心線級數也

以徑較級數減高徑爲最高後距心線之級數款三十二

最高後以距心線減高徑得徑較故以徑較級數減高徑得距心線級數也

正交長徑之正弦引長之截長徑上平圜度爲借積度自截點作線至心截平圜面積爲平引面積

甲乙爲正交長徑之正弦引長之截取平圜己丙弧度在最卑後爲乙丁己之借積度在最高後爲乙戊己之借積度自丙至丁或至戊作線在最卑後己丙丁爲平引面積在最高後己丙戊爲平

引面積

距心線之級數爲借積度求平引面積之微分款三十二

甲乙爲長徑甲戊乙爲長徑上平圜丙丁爲倍兩心差丙已丁爲倍兩心差上平圜設甲庚爲借積度最卑後則庚辛爲甲庚丙平引面積之微分試作庚癸切線與辛丙丙己丁圜內正弦平行作庚癸辛庚癸丙三角形其積必等蓋同用一庚癸底又同在庚癸辛丙二平行線內故也若庚癸底漸小變爲點則切線弧線合爲一而庚辛庚丙二細三角必仍等積甲庚丙平引面積乃庚丙等無數細三角所積而成卽庚辛等無數細三角所積

而成故庚辛爲甲庚丙平引面積之微分準十四款長徑甲乙與倍兩心差丙丁比若矢甲子與卑徑較丑辛比故丑辛卽卑徑較庚丑與甲丙等卽卑徑是庚辛與距心線等故距心線之級數爲平引面積之微分

最高後則庚壬爲甲庚丁平引面積之微分丁壬與庚癸平行試作庚癸壬庚癸丁二三角形必等積同用一庚癸底又同在庚癸丁壬二平行線內故也若庚癸底漸小變爲一點則切線合于弧線而庚壬庚丁二細三

角仍等積甲庚丁平引面積乃庚丁等無數細三角相積而成即庚壬等無數細三角相積而成故庚壬爲甲庚丁平引面積之微分準十四款長徑甲乙與倍兩心差丙丁比若矢甲子與高徑較壬寅比故壬寅即高徑較庚寅與甲丁等即高徑是庚壬與距心線等故距心線之級數爲平引面積之微分

有距心線級數求平引面積款三十四

命借積度爲弧半徑爲徑兩心差爲差正矢之級數列如左

一X二徑二/弧二 丅 一X二X三X四徑四/弧四 丄 一X二X三X四X五X六徑六/弧六 丅……

以兩心差乘之半徑除之得

一X二徑二/差弧二 丅 一X二X三X四徑四/差弧四 丄 一X二X三X四X五X六徑六/差弧六 丅……

為徑較之級數三十款以加卑徑得

徑丅差丄一X二徑二/差弧二 丅 一X二X三X四徑四/差弧四 丄 一X二X三X四X五X六徑六/差弧六 丅……

為最卑後距心線之級數三十一款以減高徑得

徑丄差丅一X二徑二/差弧二 丄 一X二X三X四徑四/差弧四 丅 一X二X三X四X五X六徑六/差弧六 丄……

為最高後距心線之級數三十二款○以最卑後距心線級數為微分其式為

徑彳弧丅差彳弧丄 一X二徑二/差弧二 彳弧丅 一X二X三X四徑四/差弧四 彳弧丄……

求其積分得左式

[illegible]

爲倍平引面積以半徑除之得平引度以最高後距心線級數爲微分其式如下

[illegible]

求其積分得

[illegible]

爲倍平引面積以半徑除之得平引度

有借積度求平引度之級數即可得平引度求借積度之級數

級數十五

法詳級數回求

最卑後卑徑爲首率矢率爲第二率推得連比例無窮率數其和與距心線等款三十六

準十七款有比例

一率　距心線　一二率　距心線　二三　距心線

二率　卑徑　相較三　卑徑較　率易　卑徑

三率　卑徑　四率相　卑徑　位則　卑徑較

四率　較率　較則得　矢率　得　矢率

以矢率減卑徑較爲甲率復以卑徑乘之以距心線除之得第三率以第三率減甲率爲乙率復以卑徑乘之

以距心線除之得第四率如此推之不已各率之和終不能大于距心線故無窮率數之和必與距心線等也

以圖明之甲乙爲距心線甲丙爲卑徑取甲丁等于甲丙作丁丙聯線復作丙乙聯線乃與甲丙平行作丁戊線又與丙丁平行作戊己線則丁己即矢率蓋乙甲丙乙丁戊爲同式形故乙甲與甲丙比必若乙丁與丁戊比乙甲爲距心線甲丙爲卑徑乙丁爲卑徑較則丁戊必爲矢率丁甲丙己丁

戊爲同式形甲丁等于甲丙則丁己必等于丁戊故丁己卽矢率次與丁戊平行作己庚線與戊己平行作庚辛線與己庚平行作辛壬線與庚辛平行作壬癸線如此作之不已成甲丁丁己己辛辛癸等無窮連比例率其和必與甲乙等也

最高後高徑爲首率正矢率爲第二率負推得連比例無窮率數正負相間其總較與距心線等款二十七

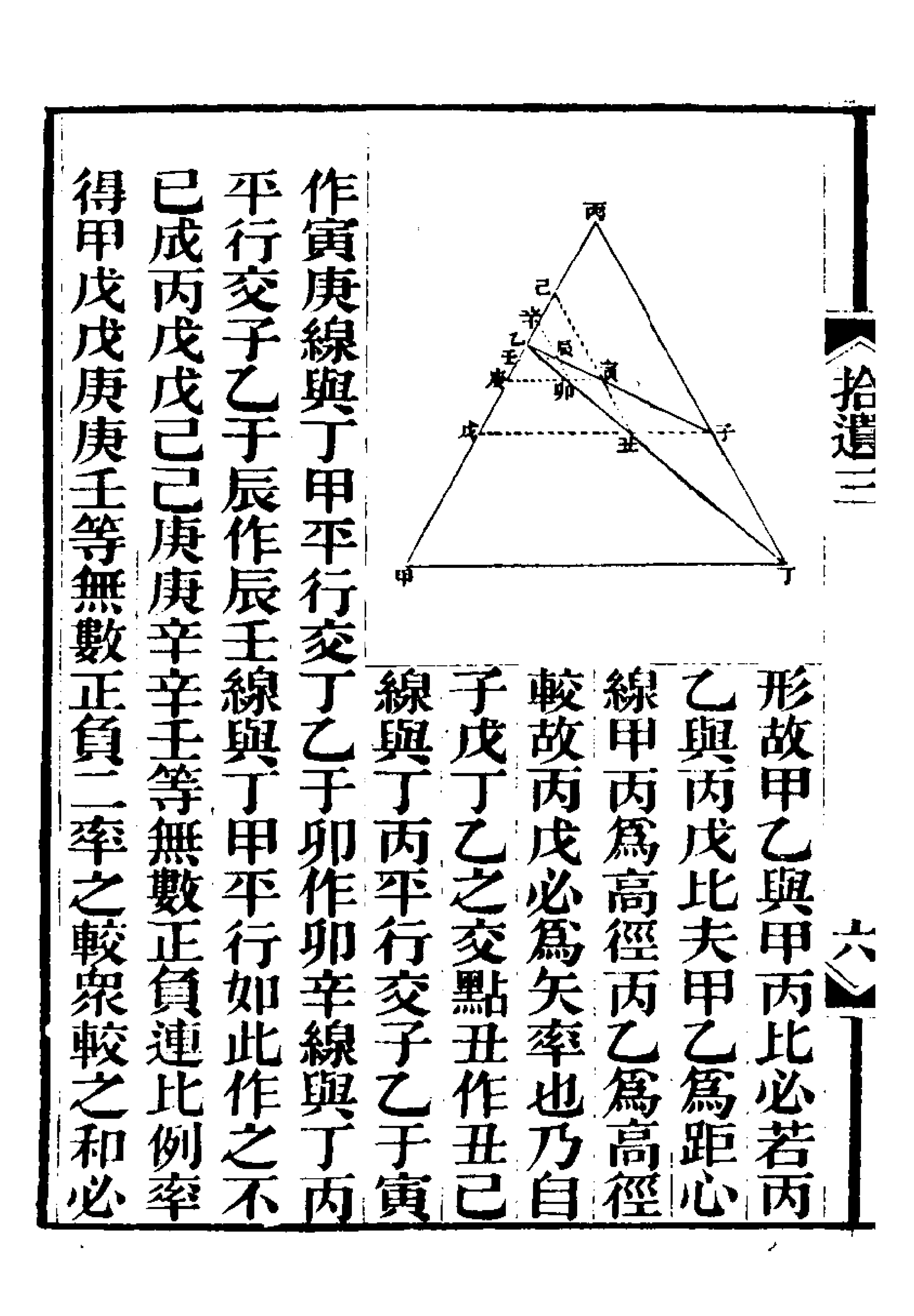
準二十款有比例

一率　距心線　二率　距心線　三率　距心線

二率　高徑　相較三　高徑較　率易　高徑

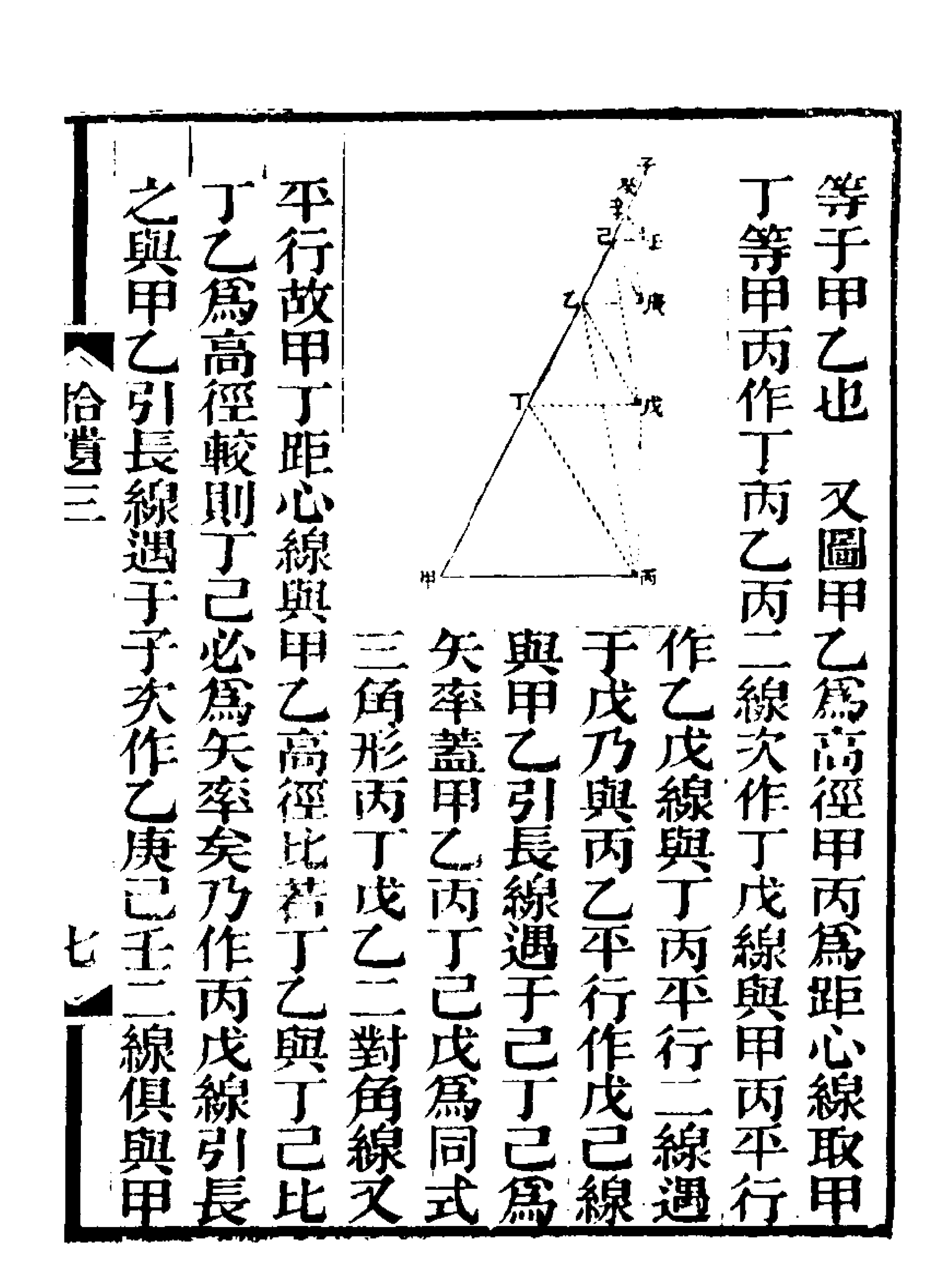
三率　高徑　　四率相　高徑　位則　高徑較
四率　和率　　較得　　矢率　得　　矢率

以高徑較減矢率爲甲率以高徑乘之以距心線除之
得第三率以甲率減之爲乙率以高徑乘之以距心線
除之得第四率如此推之不已各率正負之總較終不
能大于距心線故無窮率數之總較必與距心線等也
以圖明之甲乙爲距心線甲丙爲高徑作甲丙丁等邊
三角形作乙丁線又作乙子線令丙乙子角與甲乙丁
角等乃與丁甲平行作子戊線則丙戊必爲矢率蓋甲
乙丁丙乙子爲同式三角形甲丙丁丙戊子俱爲等邊



形故甲乙與甲丙比必若丙乙與丙戊比夫甲乙爲距心線甲丙爲高徑丙乙爲高徑較故丙戊必爲矢率也乃自子戊丁乙之交點丑作丑己線與丁丙平行交子乙于寅作寅庚線與丁甲平行交丁乙于卯作卯辛線與丁丙平行交子乙于辰作辰壬線與丁甲平行如此作之不已成丙戊戊己己庚庚辛辛壬等無數正負連比例率得甲戊戊庚庚壬等無數正負二率之較衆較之和必

等于甲乙也　又圖甲乙爲高徑甲丙爲距心線取甲丁等甲丙作丁丙乙丙二線次作丁戊線與甲丙平行



作乙戊線與丁丙平行二線遇于戊乃與丙乙平行作戊己線與甲乙引長線遇于己丁己爲矢率蓋甲乙丙丁己戊爲同式三角形丙丁戊乙二對角線又平行故甲丁距心線與甲乙高徑比若丁乙與丁己比丁乙爲高徑較則丁己必爲矢率矣乃作丙戊線引長之與甲乙引長線遇于子次作乙庚己壬二線俱與甲

丙平行作庚辛壬癸二線俱與丙乙平行又作庚己壬辛二聯線必與丙丁平行也如此作之不已成甲乙正丁己負乙辛正己癸負等無數連比例率諸正率之和爲甲子諸負率之和爲丁子其較爲甲丁乃距心線也

有最卑後實引度求距心線之級數款三十八

命實引度爲天其矢之級數如左

$\frac{一\times二徑^{二}}{天^{二}} 丅 \frac{一\times二\times三\times四徑^{四}}{天^{四}} 丄 \frac{一\times二\times三\times四\times五\times六徑^{六}}{天^{六}} 丅 \cdots\cdots$

以半徑率（$\frac{徑丄差}{(徑丅差)差}$十六數界說）乘之得

$\frac{一\times二(徑丄差)徑}{(徑丅差)差天^{二}} 丅 \frac{一\times二\times三\times四(徑丄差)徑^{三}}{(徑丅差)差天^{四}} 丄 \frac{一\times二\times三\times四\times五\times六(徑丄差)徑^{五}}{(徑丅差)差天^{六}} 丅 \cdots\cdots$

以半徑除之得下式

$\frac{一\times二(徑丄差)徑^{二}}{(徑丅差)差天^{二}} 丅 \frac{一\times二\times三\times四(徑丄差)徑^{四}}{(徑丅差)差天^{四}} 丄 \frac{一\times二\times三\times四\times五\times六(徑丄差)徑^{六}}{(徑丅差)差天^{六}} 丅 \cdots\cdots$

為矢率級數自乘得式如下

$\frac{四(徑丄差)徑^{四}}{(徑丅差)差天^{四}} 丅 \frac{四\times二\times四(徑丄差)^{二}徑^{六}}{(徑丅差)^{二}差^{二}天^{六}} 丄 \frac{四\times三\times四\times五\times六(徑丄差)^{二}徑^{八}}{(徑丅差)^{二}差^{二}天^{八}} 丅 \frac{四\times五\times六\times七\times八(徑丄差)^{二}徑^{一〇}}{(徑丅差)^{二}差^{二}天^{一〇}} 丄 \cdots\cdots$

$丅 \frac{四\times三\times四(徑丄差)^{二}徑^{六}}{(徑丅差)^{二}差^{二}天^{六}} 丄 \frac{四\times九\times一\times六(徑丄差)^{二}徑^{八}}{(徑丅差)^{二}差^{二}天^{八}} 丅 \frac{四\times九\times一\times六\times五\times六(徑丄差)^{二}徑^{一〇}}{(徑丅差)^{二}差^{二}天^{一〇}} 丄 \cdots\cdots$

$丄 \frac{四\times三\times四\times五\times六(徑丄差)^{二}徑^{八}}{(徑丅差)^{二}差^{二}天^{八}} 丅 \frac{四\times九\times一\times六\times五\times六(徑丄差)^{二}徑^{一〇}}{(徑丅差)^{二}差^{二}天^{一〇}} 丄 \cdots\cdots$

$丅 \frac{四\times三\times四\times五\times六\times七\times八(徑丄差)^{二}徑^{一〇}}{(徑丅差)^{二}差^{二}天^{一〇}} 丄 \cdots\cdots$

依矢率級數通分併之得

丅 一×二×三×四×五×六×七×八×九×一〇(徑丄差)三徑一〇 / 五一〇(徑丅差)三差三天一〇 丄、、、、、、、

除徑畢

丅 一×二×三×四×五×六×七×八×九×一〇(徑丄差)三徑一〇 / 五一〇(徑丅差)差三天一〇 丄、、、、、

率以三為
級矢率第

丄 四×三×四×五×六×七×八(徑丄差)三徑一〇 / 一二六(徑丅差)差三天一〇 丅、、、、、、、、、

丄 四×九×一六×五×六(徑丄差)三徑一〇 / 三〇(徑丅差)差三天一〇 丅、、、、、、、、、

丄 四×九×一六×五×六(徑丄差)三徑一〇 / 六(徑丅差)差三天一〇 丅、、、、、、、、、

數級率矢依

丄 一×二×三×四×五×六×七×八×九×一〇(徑丄差)三徑一〇 / 一二三〇(徑丅差)差三天一〇 丅、、、、、、

率以四為
級矢率第

丅 四×三×四×五×六×七×八(徑丄差)四徑一〇 / 一二六〇(徑丅差)差四天一〇 丄、、、、、、

丅 四×九×一六×五×六(徑丄差)四徑一〇 / 九〇(徑丅差)四天一〇 丄、、、、、、

一×二×三×四(徑丄差)^二徑^二 ／ 六(徑丅差)^二差^二天^四 丅 一×二×三×四×五×六(徑丄差)^三徑^三 ／ 三〇(徑丄差)差^三天^六 丄 一×二×三×四×五×六×七×八(徑丄差)^四徑^四 ／ 一二六(徑丅差)差^四天^八

之得

一×二×三×四(徑丄差)^二徑^二 ／ 六(徑丅差)差^二天^四 丅 一×二×三×四×五×六(徑丄差)^三徑^三 ／ 三〇(徑丄差)差^三天^六 丄 一×二×三×四×五×六×七×八(徑丄差)^四徑^四 ／ 一二六(徑丅差)差^四天^八

數乘之卑徑除之得

四三四(徑丄差)^二徑^二 ／ 六(徑丅差)差^二天^四 丅 四×三×四×五×六(徑丄差)^三徑^三 ／ 三〇(徑丅差)差^三天^六

丅 四×九×一六(徑丄差)^四徑^四 ／ 六(徑丅差)差^四天^八

通分併之得

一×二×三×四×五×六(徑丄差)^三徑^六 ／ 九〇(徑丅差)差^三天^六 丅 一×二×三×四×五×六×七×八(徑丄差)^四徑^八 ／ 一二六〇(徑丅差)差^四天^八

數乘之卑徑除之得

一四×三×四×五×六(徑丄差)^四徑^八 ／ 一九〇(徑丅差)差^四天^八

依矢率級數

丅一×二×三×四×五×六×七×八×九×一〇(徑丄差)^四徑^一〇 / 七五六〇〇(徑丅差)差^四天^一〇 丄

為第五率以矢率級

丅 (徑丄差)^五徑^六 / 差^五天^一〇

依矢率級

丅 (徑丄差)^五徑^六 / 差^五天^一〇

為第六率并各率

丄 (徑丄差) / 九〇差^一 丅 (徑丄差) / 一〇差^二 丄 (徑丄差) / 差) ×一×二×三×四×五×六徑^六 / 天^六

丄((徑丄差)^五 / 一二四〇〇差^五 丅 (徑丄差)^四 / 七九六〇〇差^四 丄 (徑丄差) / 三二六〇差^三 丅 (徑丄差)^二 / 五一〇差^二 丄 徑丄差 / 一差)

即最卑後實引度求

通分併之得

$\frac{徑^{八}(徑上差)^{四}}{天^{八}差^{四}(徑下差)二五二〇} \times 八\times七\times六\times五\times四\times三\times二\times一$

數乘之卑徑除之得

$\frac{八\times七\times六\times五\times四\times三\times四}{天^{一〇}差^{五}(徑下差)二五二〇}$

數通分得

$\frac{一〇\times九\times八\times七\times六\times五\times四\times三\times三\times二}{(徑下差)一一一三四〇〇}$

加卑徑得式如下

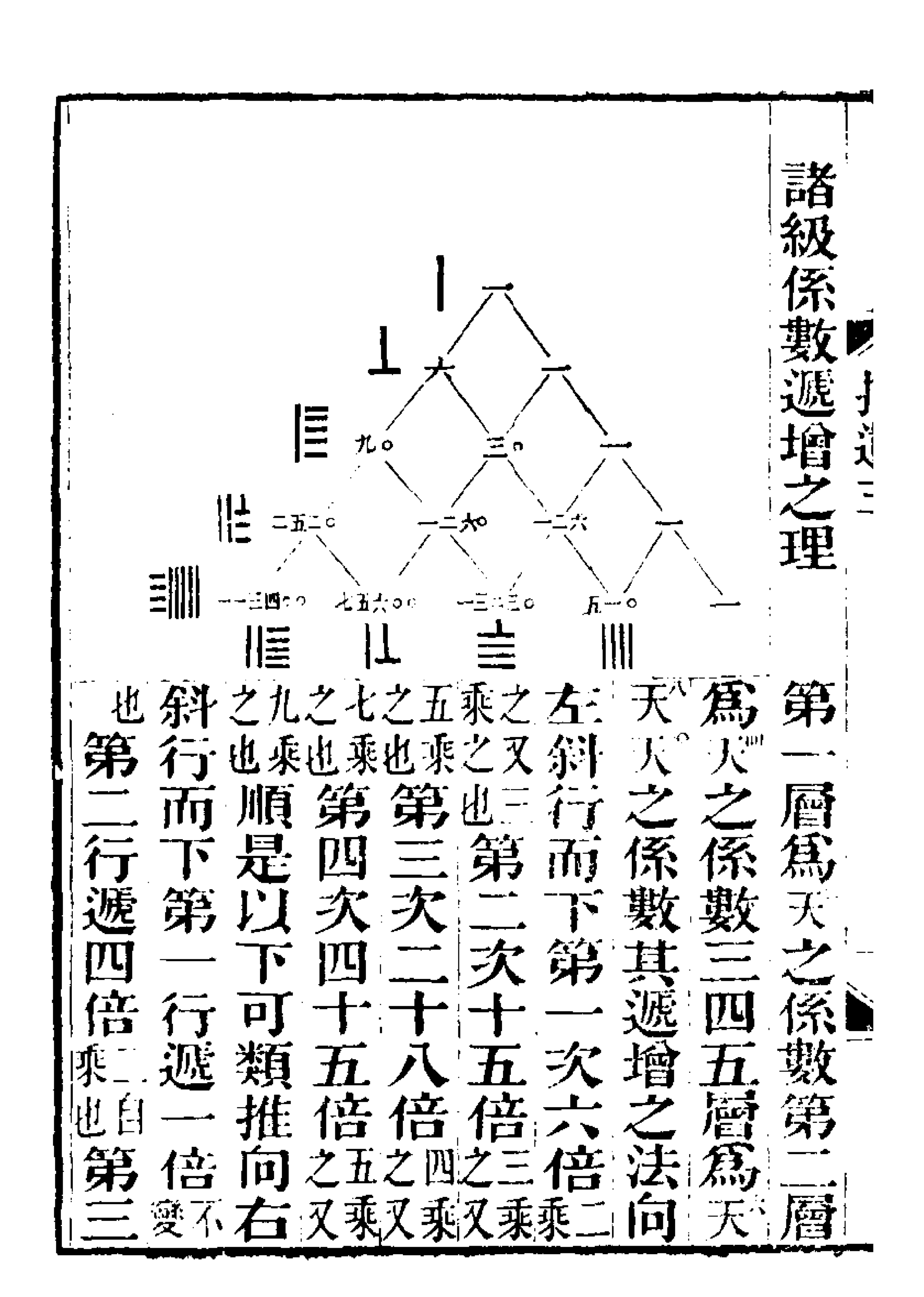
$\frac{徑^{四}}{天^{四}} 一\times二\times三\times四 \left(\frac{徑上差}{一差} 丅 \frac{徑上差}{六差^{二}} 丄 \frac{徑}{天^{二}} 一\times二 丄 \frac{徑上差}{一差} 丄 \right) \Big\{ (徑丅差)$

$\frac{徑^{八}}{天^{八}} 八\times七\times六\times五\times四\times三\times二\times一 \left(\frac{徑上差}{一差} 丅 \frac{徑上差}{一二差^{二}} 丄 \frac{徑上差}{一〇〇差^{三}} 丅 \frac{徑上差}{二五二〇差^{四}} \right) 丄$

$\Big\} 丄 \frac{徑^{一〇}}{天^{一〇}} 一〇\times九\times八\times七\times六\times五\times四\times三\times二\times一$

距心線之級數也

諸級係數遞增之理



第一層爲天之係數第二層爲天之係數三四五層爲天天天之係數其遞增之法向左斜行而下第一次六倍（二乘之又三乘之也）第二次十五倍（三乘之又五乘之也）第三次二十八倍（四乘之又七乘之也）第四次四十五倍（五乘之又九乘之也）順是以下可類推向右斜行而下第一行遞一倍（不變也）第二行遞四倍（二自乘也）第三

行遞九倍三自乘也第四行遞十六倍四自乘也第五行遞二十五倍五自乘也順是以下可類推設欲求某數必先有本數上層之左右二數左數向右斜行右數向左斜行各依法倍之併二倍數即本數如求第四層第二數上層左數九〇九倍之得八一〇右數三〇十五倍之得四五〇併二倍數得一二六〇即本數也餘皆仿此

距心線級數自乘大小二半徑各除一次得實引度求平引度之微分數三十九

甲乙丙爲半橢圜己爲心己丁等于半長徑丁庚戊爲半平圜亦以己爲心丁己庚爲最卑後實引角甲辛己

爲橢圜平引度面積己辛爲距心線庚己半長徑方爲一率辛己距心線方爲二率壬己庚微角積圖不過略明大意其實庚壬相去極微不能辨爲三率得四率癸己辛面積爲甲辛己面積之微分用積分法求得甲辛己積以長徑乘之短徑除之得平圜內平引面積　今求微分不用半長徑方爲一率而用大小二半徑相乘方爲一率則求得積分即平圜內平引面積不必更以長徑乘短徑除也三率爲一故款中不言也

有實引度距心線之級數求平引度款四十

置三十八款諸率數第一率不變第二率二倍之第三率三倍之第四率四倍之順是以下皆如是倍之倍畢以一率統乘之得數即距心線級數自乘積也列式如左

⊥(徑⊥差)三/三六〇差三 ⊤ (徑⊥差)二/九〇差二 ⊥ 徑⊥差/二差) ——— 一×二×三×四×五×六 徑六/天六

⊥((徑⊥差)五/六八〇四〇〇差五 ⊤ (徑⊥差)四/三七八〇〇〇差四 ⊥ (徑⊥差)三/五二九二〇差三 ⊤ (徑⊥差)二/一五二〇差二 ⊥ 徑⊥差/二差)

大小二半徑

⊥((徑⊥差)三/三六〇差三 ⊤ (徑⊥差)二/九〇差二 ⊥ 徑⊥差/二差) ——— 一×二×三×四×五×六 徑七/天六

⊥((徑⊥差)五/六八〇四〇〇差五 ⊤ (徑⊥差)四/三七八〇〇〇差四 ⊥ (徑⊥差)三/五二九二〇差三 ⊤ (徑⊥差)二/一五二〇差二 ⊥ 徑⊥差/二差)

爲實引度求平引度

⊥((徑⊥差)三/三六〇差三 ⊤ (徑⊥差)二/九〇差二 ⊥ 徑⊥差/二差) ——— 二×三×四×五×六×七 徑七/天七

⊥((徑⊥差)五/六八〇四〇〇差五 ⊤ (徑⊥差)四/三七八〇〇〇差四 ⊥ (徑⊥差)三/五二九二〇差三 ⊤ (徑⊥差)二/一五三〇差二 ⊥ 徑⊥差/二差)

即平引面積之倍以半

$$\left(\text{徑}\top\text{差}\right)^{\text{二}}\left\{\text{一}\bot\frac{\text{徑}\bot\text{差}}{\text{二差}}\frac{\text{一}\times\text{二}\ \text{徑}^{\text{二}}}{\text{天}^{\text{二}}}\bot\left(\frac{\text{徑}\bot\text{差}}{\text{一八差}}\right)^{\text{二}}\top\frac{\text{徑}\bot\text{差}}{\text{二差}}\frac{\text{一}\times\text{二}\times\text{三}\times\text{四}\ \text{徑}^{\text{四}}}{\text{天}^{\text{四}}}\right.$$

$$\bot\left(\frac{(\text{徑}\bot\text{差})^{\text{四}}}{\text{一二六○○差}^{\text{四}}}\top\frac{(\text{徑}\bot\text{差})^{\text{三}}}{\text{五○四○差}^{\text{三}}}\bot\frac{(\text{徑}\bot\text{差})^{\text{二}}}{\text{三七八差}^{\text{二}}}\top\frac{\text{徑}\bot\text{差}}{\text{二差}}\right)\frac{\text{一}\times\text{二}\times\text{三}\times\text{四}\times\text{五}\times\text{六}\times\text{七}\times\text{八}\ \text{徑}^{\text{八}}}{\text{天}^{\text{八}}}$$

$$\left.\frac{\text{一}\times\text{二}\times\text{三}\times\text{四}\times\text{五}\times\text{六}\times\text{七}\times\text{八}\times\text{九}\times\text{一○}\ \text{徑}^{\text{一○}}}{\text{天}^{\text{一○}}}\bot\cdots\right\}$$

各除一次得

$$\frac{\text{徑}}{(\text{徑}\top\text{差})^{\text{三}}}\left\{\text{一}\bot\frac{\text{徑}\bot\text{差}}{\text{二差}}\frac{\text{一}\times\text{二}\ \text{徑}^{\text{三}}}{\text{天}^{\text{二}}}\bot\left(\frac{\text{徑}\bot\text{差}}{\text{一八差}}\right)^{\text{二}}\top\frac{\text{徑}\bot\text{差}}{\text{二差}}\frac{\text{一}\times\text{二}\times\text{三}\times\text{四}\ \text{徑}^{\text{五}}}{\text{天}^{\text{四}}}\right.$$

$$\bot\left(\frac{(\text{徑}\bot\text{差})^{\text{四}}}{\text{一二六○○差}^{\text{四}}}\top\frac{(\text{徑}\bot\text{差})^{\text{三}}}{\text{五○四○差}^{\text{三}}}\bot\frac{(\text{徑}\bot\text{差})^{\text{二}}}{\text{三七八差}^{\text{二}}}\top\frac{\text{徑}\bot\text{差}}{\text{二差}}\right)\frac{\text{一}\times\text{二}\times\text{三}\times\text{四}\times\text{五}\times\text{六}\times\text{七}\times\text{八}\ \text{徑}^{\text{九}}}{\text{天}^{\text{八}}}$$

$$\left.\frac{\text{一}\times\text{二}\times\text{三}\times\text{四}\times\text{五}\times\text{六}\times\text{七}\times\text{八}\times\text{九}\times\text{一○}\ \text{徑}^{\text{一一}}}{\text{天}^{\text{一○}}}\bot\cdots\right\}\text{彳天}$$

之微分求其積分得

$$\frac{\text{徑}}{(\text{徑}\top\text{差})^{\text{三}}}\left\{\text{天}\bot\frac{\text{徑}\bot\text{差}}{\text{二差}}\frac{\text{二}\times\text{三}\ \text{徑}^{\text{三}}}{\text{天}^{\text{三}}}\bot\left(\frac{\text{徑}\bot\text{差}}{\text{一八差}}\right)^{\text{二}}\top\frac{\text{徑}\bot\text{差}}{\text{二差}}\frac{\text{二}\times\text{三}\times\text{四}\times\text{五}\ \text{徑}^{\text{五}}}{\text{天}^{\text{五}}}\right.$$

$$\bot\left(\frac{(\text{徑}\bot\text{差})^{\text{四}}}{\text{一二六○○差}^{\text{四}}}\top\frac{(\text{徑}\bot\text{差})^{\text{三}}}{\text{五○四○差}^{\text{三}}}\bot\frac{(\text{徑}\bot\text{差})^{\text{二}}}{\text{三七八差}^{\text{二}}}\top\frac{\text{徑}\bot\text{差}}{\text{二差}}\right)\frac{\text{二}\times\text{三}\times\text{四}\times\text{五}\times\text{六}\times\text{七}\times\text{八}\times\text{九}\ \text{徑}^{\text{九}}}{\text{天}^{\text{九}}}$$

$$\left.\frac{\text{二}\times\text{三}\times\text{四}\times\text{五}\times\text{六}\times\text{七}\times\text{八}\times\text{九}\times\text{一○}\times\text{一一}\ \text{徑}^{\text{一一}}}{\text{天}^{\text{一一}}}\bot\cdots\right\}$$

徑即半長徑除之得平引度

有最高後實引度求距心線之級數 款四十一

命實引度為天

丅一〤二〤三〤四〤五〤六〤七〤八徑七／天八 丄、、、、、、

以半徑率 徑丅差（徑丄差） 十九款界

丅一〤二〤三〤四〤五〤六〤七〤八（徑丅差）徑八／（徑丄差）差 天八 丄、、、、、

為矢率級數負

丅一〤二〤三〤四〤五〤六〤七〤八〤九〤一〇（徑丅差）二徑一／五一〇（徑丄差）差二 天一〇 丄、、、、、

為第三率正以矢率

丄一〤二〤三〤四〤五〤六〤七〤八〤九〤一〇（徑丅差）三徑一〇／一三二三〇（徑丄差）差三 天一〇 丅、、、、、

為第四率負以矢率

丅一〤二〤三〤四〤五〤六〤七〤八〤九〤一〇（徑丅差）四徑一〇／七五六〇〇（徑丄差）差四 天一〇 丄、、、、、、

其矢之級數爲

$$\frac{天^{二}}{一\times二徑}丅\frac{天^{四}}{一\times二\times三\times四徑^{三}}丄\frac{天^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\times六徑^{五}}$$

說乘之以半徑除之得

$$\frac{(徑丄差)差天^{二}}{一\times二(徑丅差)徑}丅\frac{(徑丄差)差天^{四}}{一\times二\times三\times四(徑丅差)徑^{三}}丄\frac{(徑丄差)差天^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\times六(徑丅差)徑^{五}}$$

自乘高徑除之得

$$\frac{六(徑丄差)差^{二}天^{四}}{一\times二\times三\times四(徑丅差)徑^{三}}丅\frac{二〇(徑丄差)差^{二}天^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\times六(徑丅差)徑^{五}}丄\frac{二二六(徑丄差)差^{二}天^{八}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\times八(徑丅差)徑^{七}}$$

級數乘之高徑除之得

$$\frac{九〇(徑丄差)差^{三}天^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\times六(徑丅差)^{二}徑^{六}}丅\frac{二二六〇(徑丄差)差^{三}天^{八}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\times八(徑丅差)^{三}徑^{八}}$$

級數乘之高徑除之得

$$\frac{二二五〇(徑丄差)差^{四}天^{八}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\times八(徑丅差)^{四}徑^{八}}$$

爲第五率正以矢率級數

(徑丅差)⁹ 徑¹⁰ / 差⁹ 天¹⁰ ⊤ ……

爲第六率負并諸正率加

(徑丅差) / 一差 ⊥ (徑丅差)² / 三〇差² ⊥ (徑丅差)³ / 九…差³ ⊤ ……

一×二×三×四×五×六徑⁶ / 天⁶

(徑丅差) / 一差 ⊥ (徑丅差)² / 五一〇差² ⊥ (徑丅差)³ / …差³ ⊥ (徑丅差)⁴ / …差⁴ ⊥ (徑丅差)⁵ / …差⁵ ⊤ ……

仰最高後實引度求距

乘之高徑除之得

[illegible]

高徑減諸負率其式爲

[illegible]

[illegible]

[illegible]

心線之級數也

距心線級數自乘大小二半徑各除一次為實引度求平引度之微分款四十二

甲乙丙為半橢圜丁乙戊為半平圜皆以己為心平圜半徑與橢圜半長徑等戊己庚為最高後實引角辛丙己為橢圜平引面積己辛為距心線己庚半長徑自乘為一率己辛自乘為二率壬己庚微角積一為三率得四率癸己辛積為辛丙己平引面積之微分餘解同三十九款

有實引度距心線之級數求平引度款四十三

置四十一款諸率數依四十款倍之乘之得左式

$$丅\left(\frac{(徑丅差)^{三}}{三六〇差^{三}} 丄 \frac{(徑丅差)^{二}}{九〇差^{二}} 丄 \frac{徑丅差}{二差}\right)\frac{一×二×三×四×五×六徑^{六}}{天^{六}}$$

$$丅\left(\frac{(徑丅差)^{五}}{六〇四八〇差^{五}} 丄 \frac{(徑丅差)^{四}}{三七八〇〇差^{四}} 丄 \frac{(徑丅差)^{三}}{六九〇〇差^{三}} 丄 \frac{(徑丅差)^{二}}{一九三〇差^{二}} 丄 \frac{徑丅差}{二二差}\right)$$

大小二半徑各除一次得

$$丅\left(\frac{(徑丅差)^{三}}{三六〇差^{三}} 丄 \frac{(徑丅差)^{二}}{九〇差^{二}} 丄 \frac{徑丅差}{二差}\right)\frac{二×三×四×五×六×七徑^{七}}{天^{七}}$$

$$丅\left(\frac{(徑丅差)^{五}}{六〇四八〇差^{五}} 丄 \frac{(徑丅差)^{四}}{三七八〇〇差^{四}} 丄 \frac{(徑丅差)^{三}}{五二九〇差^{三}} 丄 \frac{(徑丅差)^{二}}{一五三〇差^{二}} 丄 \frac{徑丅差}{二差}\right)$$

即平引面積之倍以半

[illegible]

[illegible]

[illegible]

微分求其積分得

[illegible]

[illegible]

[illegible]

徑除之得平引度

有實引度求平引度之級數即可推平引度求實引度之級數款四十四法詳級數回求

無錫華蘅芳校